Abstandsörter im Polarraume

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doktorwürde

der

hohen philosophischen Fakultät der Kgl. Universität Breslau

eingereicht

und mit ihrer Genehmigung veröffentlicht

von

Rudolf Dittrich

Freitag, den 29. Juli 1910, mittags 12½ Uhr

im Musiksaale der Universität:

Vortrag:

„Maxima und Minima im VII. Buche des Apollonius"

und

Promotion.

Breslau
Buchdruckerei H. Fleischmann
1910

Gedruckt mit Genehmigung der hohen philosophischen Fakultät der Kgl. Universität Breslau.

Referent: Prof. Dr. **Sturm**.

Termin der mündlichen Prüfung: 4. Mai 1910.

Meinen lieben Eltern.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, an dieser Stelle meinem hochverehrten Lehrer

Herrn Geheimrat Prof. Dr. Sturm

meinen herzlichsten Dank auszusprechen für die reiche Anregung und Förderung, die mir in seinen Vorlesungen und Uebungen zu Teil wurde, und insbesondere für sein stetes Interesse und seine wertvollen Ratschläge bei der Abfassung der vorliegenden Arbeit.

Inhaltsübersicht.

Seite

I. Kapitel.

Abstandsdefinitionen und Hilfssätze.

§ 1. Der Abstand eines unendlich fernen Elementes von sich selbst 9
§ 2. Der Abstand eines Punktes von einer Geraden . . 11
§ 3. Der Abstand eines Punktes von einer Ebene . . 14
§ 4. Der Abstand zweier Geraden des Raumes von einander 17

II. Kapitel.

I. Abschnitt: Die e-Punkte einer Punktinvolution 23
II. Abschnitt: Die e-Pole und e-Polaren eines Polarfeldes . . 26
§ 1. Die Ordnung der C_e^4-Kurve; ihre Gleichung . . 26
§ 2. Die Doppelpunkte der C_e^4-Kurve 28
§ 3. Die beiden Grenzfälle $e = 0$ und $e = \infty$ . . . 30
§ 4. Die Grundpunkte des Büschels der C_e^4-Kurven des Polarfeldes 32
§ 5. Allgemeine Eigenschaften der C_e^4, Konstruktion derselben 35
§ 6. Die C_e^4
- einer Ellipse 38
- einer Hyperbel 39
- eines Polarfeldes mit reell imaginärer Basiskurve 46
- einer Parabel 50

III. Kapitel.

Die e-Pole und e-Ebenen eines Polarraumes.

§ 1. Die Ordnung der F_e^4-Fläche 52
§ 2. Der Doppelkegelschnitt der F_e^4 55
§ 3. Die beiden Specialfälle $e = 0$ und $e = \infty$ . . . 56
§ 4. Die Büscheleigenschaft der F_e^4-Flächen 58

Seite

§ 5. Allgemeine Eigenschaften der F_e^4, Konstruktion derselben 61

§ 6. Die Gestaltung der F_e^4 bei den verschiedenen Arten von Polarräumen mit endlichem Mittelpunkte . . 64

Die F_e^4 eines Ellipsoids 64
eines einschaligen Hyperboloids . . . 66
eines zweischaligen Hyperboloids . . . 74
eines reell-imaginären Ellipsoids . . . 78

§ 7. Die F_e^4 in Polarräumen mit unendlich fernem Mittelpunkte 86

Die F_e^4 eines hyperbolischen Paraboloids . . . 87
eines elliptischen Paraboloids 89

§ 8. Eine quadratische Nullverwandtschaft im Raume . 89

IV. Kapitel.

Der Complex der e-Polaren eines Polarraumes.

§ 1. Bestimmung der Gradzahl von E^4 92

§ 2. Die Doppelstrahlen von E^4 94

§ 3. Der e-Polaren-Complex für $e = 0$ und $e = \infty$ . . 95

§ 4. E^4 als Complex der Nullstrahlen von F_e^4 oder Φ_e^{IV} 97

§ 5. Asymptoten, Asymptotenebenen und Punkte von $\mathfrak{R}_\infty^2$ als Nullelemente in $\mathfrak{R}^2$ 100

§ 6. Complexkegel und Complexkurven in speciellen Punkten bezw. Ebenen 104

§ 7. Die Büscheleigenschaft der e-Polaren-Complexe eines Polarraumes 106

§ 8. Einige specielle e-Polaren-Complexe 107

Anhang.

Der e-Polaren-Complex eines Nullraumes.

§ 1. Einleitung 109

§ 2. Der Grad des e-Polaren-Complexes im Nullraume 109

§ 3. Konstruktion der Complexkurven und Complexkegel 111

§ 4. Die Doppelstrahlen und die singuläre Fläche von H^2 113

§ 5. Die consingulären Complexe von H^2 117

I. Kapitel.

Abstandsdefinitionen und Hilfssätze.

§ 1. Der Abstand eines unendlich fernen Elementes von sich selber.

Der Abstand zweier endlicher Punkte P und Q ist die geradlinige endliche Strecke PQ, welche P und Q begrenzen.

Ein endlicher Punkt hat von sich selbst den Abstand 0, von jedem anderen endlichen Punkte endlichen, von jedem unendlich fernen Punkte unendlich grossen Abstand.

Ein unendlich ferner Punkt P_∞ hat von jedem endlichen Punkte unendlich grossen Abstand. Ebenso ist der Abstand des Punktes P_∞ von jedem andern unendlich fernen Punkte unendlich gross. Welchen Abstand aber ein unendlich ferner Punkt von sich selbst hat, ist nicht von vornherein zu erkennen, da das für eigentliche Punkte Geltende nicht ohne weiteres auf uneigentliche Punkte übertragen werden kann. Um den Abstand, den ein unendlich ferner Punkt P_∞ von sich selbst hat, zu bestimmen, legen wir durch P_∞ eine beliebige endliche Gerade p und nehmen in ihr zwei Punkte A und B des endlichen gegebenen Abstandes e an. Verschieben wir diese Strecke AB auf p immer weiter nach der einen oder anderen Seite hin, so fällt schliesslich sowohl A als B mit P_∞ zusammen, ohne dass die Strecke AB ihre endliche Grösse e ändert. Es ist also $P_\infty P_\infty = AB = e$. Daraus folgt, dass der Punkt P_∞ von sich selbst den endlichen Abstand e hat. Nun war e beliebig gewählt, also kommt der Strecke $P_\infty P_\infty$ jeder beliebige endliche Wert zu, so auch offenbar der untere Extremwert $e = 0$. Dass man e

beliebig gross und schliesslich unendlich gross annehmen kann, folgt, ausser aus Stetigkeitsgründen, aus folgender Betrachtung: Ein endlicher Punkt P auf p begrenzt mit P_∞ eine unendlich grosse Strecke (streng genommen zwei), d. h. P und P_∞ haben unendlich grossen Abstand von einander. Lässt man P auf p nach einer Seite hin immer weiter hinausrücken, so bleibt stets $PP_\infty = \infty$, auch wenn schliesslich P selbst im Unendlichen liegt, d. h. P_∞ hat von sich selbst auch den Abstand $e = \infty$. Es hat sich somit ergeben:

(I). Ein unendlich ferner Punkt hat von sich selbst jeden beliebigen Abstand.

Der Ausdruck „jeder beliebige Abstand" wird hier wie auch stets im Folgenden in dem Sinne gebraucht, dass dem Abstande jeder beliebige Wert e von $e = 0$ bis $e = \infty$ zuzuerkennen ist. Wir werden mitunter auch in demselben Sinne den Ausdruck „unbestimmter Abstand" brauchen.

Im Anschluss an Satz (I) ergeben sich zwei analoge Sätze für eine unendlich ferne Gerade bezw. die unendlich ferne Ebene:

In einer Ebene γ seien zwei parallele Geraden g und g' gegeben; beide werden zunächst als reell und endlich vorausgesetzt. Sie begrenzen einen Parallelstreifen einer gewissen Breite e, die wir als den „ebenen" Abstand der Parallelen g und g' bezeichnen.

Fällt g mit g' zusammen, so ist $e = 0$, d. h. eine beliebige endliche reelle Gerade hat als zu sich selbst parallele Gerade von sich selbst den ebenen Abstand $e = 0$.

Schieben wir den von g und g' begrenzten Parallelstreifen der Breite e in dem Parallelstrahlenbüschel, dem g und g' angehören, nach der einen oder andern Seite immer weiter hinaus, so fallen schliesslich sowohl g als g' mit der unendlich fernen Gerade g_∞ von γ zusammen. Da aber die Breite des Parallelstreifens als constant vorausgesetzt wurde, so hat g_∞ als zu sich selbst parallele Gerade von sich selbst den ebenen Abstand e, wo man e jeden beliebigen endlichen Wert, so auch offenbar den Wert 0 erteilen kann. Dass auch hier e beliebig gross und schliesslich unendlich gross

angenommen werden kann, lässt sich durch Zusammenstellung von g_∞ mit einer endlichen Geraden g von γ zeigen: g_∞ und g sind parallel und begrenzen zwei Parallelstreifen der Breite $e = \infty$. Lassen wir nun die Gerade g sich um ihren unendlich fernen Punkt drehen, so begrenzt sie in jeder ihrer Lagen mit g_∞ einen Parallelstreifen der Breite ∞; und dies gilt auch dann noch, wenn schliesslich g mit g_∞ zusammenfällt. Wir erhalten also folgenden, dem Satz (I) entsprechenden Satz:

(II). Eine unendlich ferne Gerade hat als zu sich selbst parallele Gerade von sich selbst jeden beliebigen ebenen Abstand.

Endlich seien ε und ε' zwei parallele Ebenen, die zunächst als endlich und reell vorausgesetzt werden. Sie begrenzen einen räumlichen Parallelstreifen einer gewissen Breite e, welche der Abstand der beiden Parallelebenen genannt wird.

Ist $\varepsilon \equiv \varepsilon'$, so ist $e = 0$, d. h. eine endliche reelle Ebene hat, als zu sich selbst parallele Ebene, von sich selbst den Abstand $e = 0$.

Verschieben wir den von ε und ε' begrenzten Parallelstreifen der Breite e, ohne seine Breite zu ändern, parallel mit sich selbst nach der einen oder andern Seite hin, so fallen schliesslich beide Ebenen mit der unendlich fernen Ebene ε_∞ zusammen, und ε_∞ begrenzt also, als zu sich selbst parallel, mit sich selbst einen Parallelstreifen der Breite e. Hierbei kann man wieder e jeden beliebigen Wert erteilen von $e = 0$ bis $e = \infty$. Dass man e in der Tat beliebig bis ∞ wachsen lassen kann, ist in ähnlicher Weise wie bei Satz (I) und Satz (II) zu zeigen: durch Zusammenstellung von ε_∞ mit einer beliebigen endlichen Ebene ε, welche zusammen einen räumlichen Parallelstreifen (eigentlich zwei) der Breite $e = \infty$ begrenzen. Ergebnis:

(III). Die unendlich ferne Ebene hat als zu sich selbst parallele Ebene von sich selbst jeden beliebigen Abstand.

§ 2. Der Abstand eines Punktes von einer Geraden.

Um für das Folgende eine bequeme Bezeichnung zu gewinnen, fassen wir die beiden absoluten Punkte einer Ebene γ

als ausgeartete Kurve zweiter Klasse auf und bezeichnen sie mit $\varkappa_a^2$. Der Pol einer Geraden g von γ nach $\varkappa_a^2$ soll ihr absoluter Pol heissen und mit $\mathfrak{G}_\infty$ bezeichnet werden.

Sind in der Ebene γ eine Gerade g und ein ausserhalb von ihr gelegener Punkt P gegeben, so versteht man bekanntlich unter dem Abstande des Punktes P von g die Länge des von P auf g gefällten Lotes. Nun ist dieses Lot nichts anderes als die Verbindungslinie von P mit dem absoluten Pole $\mathfrak{G}_\infty$ von g. Wir können also der Definition des Abstandes eines Punktes P von einer Geraden g folgende Form geben:

Definition 1. Der Abstand e *eines Punktes* P *von einer Geraden* g *ist die Strecke, welche auf der Verbindungsgeraden des Punktes* P *mit dem absoluten Pole* $\mathfrak{G}_\infty$ *von* g *durch* P *und* g *begrenzt wird.*

Diese Definition ist äquivalent der obigen. Es folgt aus ihr:

Liegt P auf g, so ist $e = 0$, (vorausgesetzt, dass g keine isotrope Gerade ist, s. weiter unten.)

Liegt P als P_∞ auf der unendlich fernen Geraden g_∞ von γ ohne mit dem unendlich fernen Punkte G_∞ von g zusammenzufallen, so ist offenbar der Abstand $(P_\infty - g) = \infty$. Ist aber $P_\infty \equiv G_\infty$, so ist $(P_\infty - g) = G_\infty G_\infty$, also nach Satz (I) unbestimmt, d. h.

(IVa). Ein unendlich ferner Punkt hat von jeder durch ihn gehenden endlichen Geraden jeden beliebigen Abstand.

Zur Bestätigung dieses Ergebnisses kann folgende Betrachtung dienen: Wird die durch einen Punkt P zu einer Geraden g gehende Parallele mit g′ bezeichnet, so kann der Abstand (P—g) gemessen werden durch den ebenen Abstand der beiden Parallelen g und g′. Fällt nun P mit G_∞ zusammen, so gehen durch $P_\infty \equiv G_\infty$ unendlich viele Parallele zu g; jede von ihnen misst durch ihren ebenen Abstand von g den Abstand des Punktes G_∞ von g. Die Abstände $e = 0$ und $e = \infty$ messen g selbst bezw. g_∞.

Ist P ein endlicher Punkt von γ, $g = g_\infty$, so wird, da jeder unendlich ferne Punkt Pol von g_∞ nach $\varkappa_a^2$ ist, auf

allen Geraden durch P der Abstand $(P—g_\infty)$ gemessen: auf ihnen allen ergibt sich $(P—g_\infty) = \infty$. Liegt nun P als P_∞ auf g_∞, so wird der Abstand $(P_\infty—g_\infty)$ auf g_∞ selbst und — da P_∞ selbst Pol von g_∞ nach x_a^2 ist — auch auf allen endlichen Geraden durch P_∞ gemessen. Letztere Geraden zeigen, dass der Abstand $(P_\infty - g_\infty) = P_\infty P_\infty$, also nach Satz (I) unbestimmt ist.

Dies folgt auch aus Satz (II): Der Abstand $(P_\infty—g_\infty)$ kann durch den ebenen Abstand jeder durch P_∞ zu g_∞ gehenden Parallelen von g_∞ gemessen werden. Alle endlichen Geraden durch P_∞ liefern den Abstand $e = \infty$, g_∞ aber, als zu sich selbst parallele Gerade, zeigt vermöge Satz (II), dass der Abstand $(P_\infty—g_\infty)$ unbestimmt ist:

(IVb) Ein unendlich ferner Punkt hat von jeder durch ihn gehenden unendlich fernen Geraden jeden beliebigen Abstand.

Somit gilt ganz allgemein:

(IV) Ein unendlich ferner Punkt hat von jeder durch ihn gehenden Geraden unbestimmten Abstand.

Es sei nun P ein beliebiger Punkt von γ, die gegebene Gerade aber sei eine nicht durch P gehende isotrope Gerade j. Ihr absoluter Pol ist ihr unendlich ferner Punkt I_∞, einer der absoluten Punkte von γ. Also ist der Abstand (P—j) nach Definition I:

$$e = PI_\infty = \infty.$$ [1])

Liegt aber P auf j, so wird die Strecke, welche den Abstand (P—j) misst, unbestimmt, da jeder Punkt von j Schnittpunkt der Verbindungsgeraden PI_∞ mit j sein kann, und e ist also unbestimmt:

(V). Ein beliebiger Punkt hat von jeder nicht durch ihn gehenden isotropen Geraden unendlich grossen Abstand. Jeder Punkt einer isotropen Geraden hat von dieser jeden beliebigen Abstand.

Diesen Satz können wir leicht analytisch bestätigen. Es sei in γ ein rechtwinkliges Coordinatensystem gegeben.

---

[1]) Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven. 1882. S. 1.

Dann wird der Abstand e eines Punktes (x_1, y_1) von einer beliebigen Geraden: $x\xi + y\eta + 1 = 0$ ausgedrückt durch die Gleichung: $e = \frac{x_1\xi + y_1\eta + 1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}$. Ist nun die durch die Gleichung: $x\xi + y\eta + 1 = 0$ dargestellte Gerade eine isotrope Gerade j, so genügen ihre Liniencoordinaten ξ und η der Liniengleichung von x_a^2: $\xi^2 + \eta^2 = 0$[1]), also ist für jeden nicht auf j gelegenen Punkt: $e = \frac{x_1\xi + y_1\eta + 1}{0} = \infty$; liegt aber (x_1, y_1) auf j, so ist $x_1\xi + y_1\eta + 1 = 0$, d. h. $e = \frac{0}{0}$, also unbestimmt. Beide Ergebnisse stimmen mit Satz (V) überein.

Da der ebene Abstand zweier parallelen Geraden g und g′ gemessen werden kann durch den Abstand, den irgend ein endlicher Punkt etwa von g von der Gerade g′ hat, so folgt aus Satz (V):

(*Va*). *Zwei parallele isotrope Geraden haben unendlich grossen ebenen Abstand.*

Und:

(*Vb*). *Eine isotrope Gerade hat als zu sich selbst parallele Gerade von sich selbst jeden beliebigen ebenen Abstand.*

§ 3. Der Abstand eines Punktes von einer Ebene.

Entsprechend der in § 2 eingeführten Bezeichnungsweise nennen wir die als ausgeartete F^2 aufgefasste absolute Kurve $\mathfrak{K}_a^2$ und bezeichnen den Pol $\mathfrak{E}_\infty$ einer Ebene ε nach $\mathfrak{K}_a^2$ als ihren absoluten Pol. Ebenso soll die Polare g_∞ einer beliebigen Geraden g des Raumes in Bezug auf $\mathfrak{K}_a^2$ ihre absolute Polare heissen.

Unter dem Abstande eines Punktes P von einer Ebene ε wird gewöhnlich die Länge des von P auf ε gefällten Lotes verstanden. Da aber die von P auf ε gefällte Senkrechte nichts anderes ist als die Verbindungslinie von P mit dem absoluten Pole $\mathfrak{E}_\infty$ von ε, so sind wir berechtigt, der Definition des Abstandes eines Punktes von einer Ebene folgende Fassung zu geben:

---

[1]) Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der Kegelschnitte. 1873. S. 502.

Definition II. Der Abstand e *eines Punktes* P *von einer Ebene* ε *ist die Strecke, welche auf der Verbindungsgeraden von* P *mit dem absoluten Pol* $\mathfrak{E}_\infty$ *von* ε *durch* P *und* ε *begrenzt wird.*

Aus dieser Definition folgt zunächst, dass, wenn der endliche Punkt P in ε selbst liegt, der Abstand $(P—\varepsilon) = 0$ ist, (wofern ε keine isotrope Ebene ist, s. unten.). Jeder unendlich ferne Punkt P_∞ ausserhalb der unendlich fernen Geraden e_∞ von ε hat nach Def. II von ε unendlich grossen Abstand.

Liegt aber P_∞ in e_∞, so wird der Abstand $(P_\infty—\varepsilon)$ gemessen durch die Strecke $P_\infty P_\infty$ und hat also nach Satz (I) jeden beliebigen Wert. Also:

(VIa). Ein unendlich ferner Punkt hat von jeder durch ihn gehenden endlichen Ebene jeden beliebigen Abstand.

Da der Abstand eines Punktes P von einer Ebene ε auch gemessen werden kann durch den Abstand, den die durch P zu ε parallel gehende Ebene ε′ von ε hat, so erkennt man, dass es durch einen Punkt P_∞, der auf der unendlich fernen Geraden e_∞ von ε liegt, unendlich viele zu ε parallele Ebenen gibt, die durch ihren Abstand von ε den Abstand $(P_\infty—\varepsilon)$ messen, was Satz (VIa) bestätigt. Die extremen Abstände $e = 0$ und $e = \infty$ messen ε selbst bezw. ε_∞.

Dass der Abstand eines endlichen Punktes P von der unendlich fernen Ebene ε_∞ unendlich gross ist, kann ebenfalls aus Def. II gefolgert werden, wenn bedacht wird, dass ε_∞ jeden ihrer Punkte zum absoluten Pole hat. Der letztere Umstand zeigt ferner, dass der Abstand eines unendlich fernen Punktes P_∞ von ε_∞ auf allen unendlich fernen und, da P_∞ ebenfalls absoluter Pol von ε_∞ ist, auch auf allen endlichen Geraden durch P_∞ gemessen wird. Die auf den letzteren Geraden gemessenen Abstände zeigen, dass der Abstand $(P_\infty—\varepsilon_\infty) = P_\infty P_\infty$, also nach (I) unbestimmt ist:

(VIb). Der Abstand, den ein unendlich ferner Punkt von der unendlich fernen Ebene hat, ist unbestimmt.

Auch aus Satz (III) kann dieser Satz abgeleitet werden: Der Abstand $(P_\infty—\varepsilon_\infty)$ kann nämlich durch den Abstand

jeder durch P_∞ parallel zu ε_∞ gehenden Ebene von ε_∞ gemessen werden. Jede endliche Ebene durch P_∞ misst den Abstand $e = \infty$, ε_∞ selbst aber, als zu sich selbst parallel, liefert nach Satz (III) die dem Abstande $(P_\infty - \varepsilon_\infty)$ zukommenden ∞^1 Werte.

Die Sätze (VIa) und (VIb) lassen sich in folgendem ganz allgemeinen vereinigen:

(VI). Ein unendlich ferner Punkt hat von jeder durch ihn gehenden Ebene jeden beliebigen Abstand.

Betrachten wir nunmehr eine isotrope Ebene ι und einen ausserhalb von ihr gelegenen Punkt P. Der absolute Pol $\mathfrak{J}_\infty$ von ι liegt auf der unendlich fernen Geraden j_∞ von ι, er ist der Punkt, in dem j_∞ $\mathfrak{K}_a^2$ berührt. Also wird der Abstand $(P—\iota)$ gemessen durch die Strecke $P\mathfrak{J}_\infty$ und ist also unendlich gross. Liegt aber P in ι, so wird der Schnittpunkt der Verbindungslinie $P\mathfrak{J}_\infty$ mit ι unbestimmt und demnach ist auch der Abstand $(P—\iota)$ unbestimmt. Ergebnis:

(VII). Jeder Punkt des Raumes hat von jeder nicht durch ihn gehenden isotropen Ebene unendlich grossen Abstand. Jeder Punkt einer isotropen Ebene hat von dieser unbestimmten Abstand.

Wir wollen auch diesen Satz in Kürze auf analytischem Wege ableiten. Ein dreirechtwinkliges Koordinatensystem sei gegeben. Der Abstand e eines Punktes $(x_1\, y_1\, z_1)$ von einer beliebigen Ebene, $x\xi + y\eta + z\xi + 1 = 0$, ist dann ausgedrückt durch die Gleichung:

$$e = \frac{x_1\xi + y_1\eta + z_1\xi + 1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \xi^2}}.$$

Ist nun die gegebene Ebene eine isotrope Ebene ι, so genügen ihre Ebenencoordinaten $\xi\eta\xi$ der Gleichung $\xi^2 + \eta^2 + \xi^2 = 0$, welche die Gleichung der als (ausgeartete) Flüche zweiter Klasse aufgefassten absoluten Kurve ist.[1]) Demnach ist der Abstand des ausserhalb von ι gelegenen Punktes $P = (x_1\, y_1\, z_1)$ von ι:

[1]) Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes 1874. I S. 250.

$$e = \frac{x_1\xi + y_1\eta + z_1\zeta + 1}{0} = \infty.$$

Liegt aber $(x_1\, y_1\, z_1)$ auf ι, so ist $x_1\xi + y_1\eta + z_1\zeta + 1 = 0$, und $e = \frac{0}{0}$, also unbestimmt. Beide Ergebnisse stimmen mit Satz (VII) überein.

Da der Abstand zweier parallelen Ebenen ε und ε' gemessen werden kann durch den Abstand, den irgend ein endlicher Punkt etwa von ε von der Ebene ε' hat, so folgt aus (VII):

(VIIa). Zwei parallele isotrope Ebenen haben unendlich grossen Abstand von einander.

Und:

(VIIb). Eine isotrope Ebene hat als zu sich selbst parallele Ebene von sich selbst jeden beliebigen Abstand.

§ 4. Der Abstand zweier Geraden des Raumes von einander.

Er wird gewöhnlich folgendermassen definiert:

Definition III. Unter dem Abstande von zwei Geraden versteht man den Abstand der parallelen Ebenen, auf denen die Geraden liegen[1]).

Werden die beiden Geraden mit g und g′, ihre unendlich fernen Punkte mit G_∞ bezw. G'_∞ bezeichnet, so wird also der Abstand der Geraden g und g′ durch den Abstand der beiden parallelen Ebenen $[gG'_\infty] = \varkappa$ und $[g'G_\infty] = \varkappa'$ gemessen. Wir wollen nun Def. III erweitern, indem wir festsetzen.

Definition IIIa. Als Abstand zweier Geraden g *und* g′ *des Raumes soll der Abstand jedes durch* g *und* g′ *möglichen Parallelebenenpaares bezeichnet werden.*

Nach dieser Definition können also zwei Geraden in gewissen Fällen auch mehr als einen Abstand haben. Wir legen Def. IIIa im Folgenden zu Grunde.

Zwei endliche windschiefe Geraden liefern nur ein Parallelebenenpaar, also nur einen Abstand. Sind g und g′

[1]) Baltzer, Die Elemente der Mathematik II. 3. Aufl. S. 154.

zwei einander in einem endlichen Punkte schneidende Geraden (welche nicht in derselben isotropen Ebene liegen, vgl. Satz (IX)), so ist der Abstand ihrer Parallelebenen = 0, also haben g und g′ den Abstand 0.

Wir betrachten nunmehr parallele Geraden, also Geraden, welche einen unendlich fernen Punkt gemeinsam haben; und zwar fassen wir zwei parallele Geraden als zwei räumliche Geraden in specieller Lage auf, nicht wie in § 1 und § 2 als zwei derselben Ebene angehörige Geraden; und indem wir von dem Abstande zweier parallelen Geraden sprechen, meinen wir jetzt den räumlichen, durch Parallelebenenpaare gemessenen Abstand.

Wir behandeln zunächst drei Sonderfälle von parallelen Geraden:

1). Es sei g′ eine die unendlich ferne Gerade g_∞ schneidende endliche Gerade. Die Ebene $\varkappa'$ ist dann offenbar die Ebene $[g' \mid g_\infty]$. Bei der Bestimmung von $\varkappa$ hat man die Ebene durch g_∞ und den unendlich fernen Punkt von g′ zu legen, welche also in diesem Falle jede beliebige Ebene durch g_∞ sein kann, auch ε_∞ oder die Ebene $[g' \mid g_\infty]$. Daraus folgt:

(VIIIa). Eine endliche und eine unendlich ferne Gerade, die einander schneiden, haben von einander jeden beliebigen Abstand.

(Der ebene Abstand zweier solchen Parallelen ist $e = \infty$!)

Die Bestimmung der Parallelebenen zweier verschiedener unendlich ferner Geraden g_∞ und g'_∞ führt auf die doppelt zu rechnende ε_∞, welche nach Satz (III) von sich selbst jeden beliebigen Abstand hat. Also:

(VIIIb). Zwei Geraden der unendlich fernen Ebene haben von einander jeden beliebigen Abstand e *von* $e = 0$ *bis* $e = \infty$.

Man kann schliesslich auch von dem räumlichen Abstande einer unendlich fernen Geraden g_∞ von sich selbst sprechen, indem man sie sich doppelt denkt. Zur Abstandsmessung mit Hilfe von Parallelebenenpaaren können irgend zwei Ebenen durch g_∞ benutzt werden, woraus folgt:

(VIIIc). Eine unendlich ferne Gerade hat von sich selbst jeden beliebigen räumlichen Abstand.

Die Sätze (VIIIa, b, c) zeigen somit für drei Specialfälle von parallelen Geraden, dass 2 parallelen Geraden ∞^1 Abstände e von $e = 0$ bis $e = \infty$ zuzuerkennen sind.

Geht man nun zu zwei endlichen parallelen Geraden g und g′ über, so haben diese zwar nach Def. IIIa auch ∞^1 Abstände mit der unteren Grenze 0. Die obere Grenze aber ist eine endliche Grösse und gleich dem ebenen Abstande von g und g′. Da aber rein begrifflich, wegen der Identität der unendlich fernen Punkte von g und g′ die Möglichkeit besteht, Ebenen jedes beliebigen Abstandes durch g und g′ zu legen, und da zudem die für die obigen drei Sonderfälle von Parallelen gefundenen Sätze auf eine Erweiterung hinweisen, so können wir sagen: die Parallelebenenpaare durch g und g′ von grösserem als dem ebenen Abstande sind imaginär [1]). Daraus folgt dann, dass auch zwei endlichen parallelen Geraden jeder beliebige Abstand e von $e = 0$ bis $e = \infty$ zuzuerkennen ist. Also:

(VIIId). Zwei endliche parallele Geraden haben von einander jeden beliebigen räumlichen Abstand.

Satz (VIIIc) sagt bereits von einer unendlich fernen Geraden aus, dass dieser als einer zu sich selbst parallelen Geraden ∞^1 räumliche Abstände von sich selbst zuzuerkennen sind. Die diese Abstände messenden Parallelebenenpaare sind reell construierbar. Auch jede endliche Gerade hat als zu sich selbst parallele Gerade nach Satz (VIIId) von sich selbst jeden beliebigen räumlichen Abstand, obwohl alle diese ∞^1 Abstände messenden Parallelebenenpaare mit Ausnahme der den Abstand $e = 0$ messenden imaginär sind [2]). Von dieser Tatsache wird später Gebrauch gemacht werden, wir sprechen sie daher in folgendem Satze aus:

---

[1]) Durch g und g′ gehen z. B. zwei Paare paralleler isotroper Ebenen, welche nach Satz (VIIa) den Abstand $e = \infty$ von g und g′ messen. Vgl. S. 22.

[2]) Der Abstand $e = \infty$, den eine endliche Gerade g von sich selbst hat, wird nach Satz (VIIb) gemessen durch jede der beiden durch g gehenden isotropen Ebenen. Vgl. S. 22.

(VIIIe). Eine endliche Gerade des Raumes hat als zu sich selbst parallele Gerade von sich selbst jeden beliebigen räumlichen Abstand.

Die Sätze (VIIIa bis d) geben zusammen den ganz allgemeinen:

(VIII). Zwei parallele Geraden haben von einander jeden beliebigen räumlichen Abstand.

Da es zunächst befremdlich erscheint, dass zwei parallele endliche Geraden ∞^1 reelle Abstände haben, (wobei allerdings die diese Abstände messenden Parallelebenenpaare von einem gewissen Abstande an imaginär sind), so wollen wir den Satz (VIII d) noch auf eine etwas andere Weise abzuleiten suchen. Wir führen zu diesem Zwecke eine neue Abstandsdefinition ein, welche enger als Def. IIIa ist und sich ihr subsumiert, also in den Fällen, in denen sie überhaupt einen Sinn hat, dasselbe aussagt wie jene. Ihr Vorteil liegt nur darin, dass sie die ∞^1 Abstände zweier endlichen parallelen Geraden besser in Evidenz setzt als die Def. IIIa, indem sie ohne imaginäre Elemente auskommt.

Sind nämlich $\mathfrak{g}_\infty$ und $\mathfrak{g}'_\infty$ die absoluten Polaren von g und g′ (vergl. § 3), so definieren wir:

Definition IIIb. Unter dem Abstande der Strahlen g *und* g′ *von einander wird die Strecke verstanden, die durch* g *und* g′ *auf dem vom Punkte* $(\mathfrak{g}_\infty \mid \mathfrak{g}'_\infty)$ *an das Strahlennetz* [g g′] *gehenden Treffstrahle begrenzt wird.*

Diese Definition versagt, wenn eine der beiden Geraden g g′ oder beide in ε_∞ liegen. In allen andern Fällen stimmt sie mit der Def. IIIa überein.

Sind g und g′ zwei im Endlichen gelegene parallele Geraden mit dem gemeinsamen unendlich fernen Punkte G_∞, so ist $\mathfrak{g}_\infty \equiv \mathfrak{g}'_\infty$ und $(\mathfrak{g}_\infty \mid \mathfrak{g}'_\infty)$ kann jeder Punkt von $\mathfrak{g}_\infty$ sein. $\mathfrak{g}_\infty$ schneide die Ebene [g | g′] im Punkte $\mathfrak{G}_\infty$. Mit Ausnahme von $\mathfrak{G}_\infty$ geht von jedem Punkte von $\mathfrak{g}_\infty$ nur ein Strahl an das Strahlennetz [g g′]. Auf ihm begrenzen g und g′ die Strecke $G_\infty G_\infty$, deren Länge nach (I) unbestimmt ist. Von dem Punkte $\mathfrak{G}_\infty$ geht ausser dem unendlich fernen Strahle $\mathfrak{G}_\infty G_\infty$ noch ein ganzer Strahlenbüschel von end-

lichen Strahlen an [g g′]. Jeder derselben ist gemeinsames Lot von g und g′, auf jedem von ihnen begrenzen g und g′ den ebenen Abstand.

Wir erhalten also auch bei dieser Abstandsdefinition für zwei endliche parallele Geraden alle ∞^1 möglichen Abstände von 0 bis ∞, welche auf den ∞^1 gemeinsamen Loten der beiden Parallelen gemessen werden:

(*VIIId′*). *Bei zwei endlichen parallelen Geraden* g *und* g′ *gibt es zwei Büschel von Geraden, welche sie und* $\mathfrak{g}_\infty$ *treffen; der eine liegt in der unendlich fernen Ebene und hat den gemeinsamen unendlich fernen Punkt von* g *und* g′ *zum Scheitel, der andere liegt in der Ebene* [g | g′] *und hat ihren Schnittpunkt mit* $\mathfrak{g}_\infty$ *zum Scheitel. Jene geben die unbestimmte Entfernung, diese den ebenen Abstand.*

Satz (VIIId) gibt zusammen mit Satz (VIIIa) und (VIIIe) die Möglichkeit, folgenden Satz aufzustellen, der als eine neue Abstandsdefinition erscheint, von welcher mehrfach Gebrauch gemacht werden wird:

Definition IIIc. Alle Geraden, die von einer endlichen Geraden g *den Abstand* e *haben, bilden den Tangentencomplex* $[g]^2_e$ *des Rotationscylinders, dessen Axe* g, *dessen Radius* e *ist.*

Es ist einer späteren Anwendung wegen notwendig, hier ausdrücklich hervorzuheben, dass jeder Strahl durch den unendlich fernen Punkt G_∞ von g Doppelstrahl von $[g]^2_e$ ist.[1])

Parallele Geraden bilden nicht die einzige Art von Geradenpaaren, denen ∞^1 Abstände zukommen: denn aus (VIIb) und Def. IIIa folgt ohne weiteres:

(*IX*). *Zwei Geraden, welche in derselben isotropen Ebene liegen, haben von einander jeden beliebigen räumlichen Abstand.*

Aus diesem Satze folgt, dass die Definition IIIc in voller Allgemeinheit gilt, auch für diejenigen Geraden von $[g]^2_e$, welche in einer der beiden durch g gehenden isotropen Ebenen liegen. Diese Geraden sind nebst sämtlichen Parallelen zu g allen zu g gehörigen Tangentencomplexen $[g]^2_x$ gemein.

---

[1]) R. Sturm, Liniengeometrie III. No. 853.

Wir wenden uns schliesslich Geradenpaaren unendlich grossen Abstandes zu. Sie erfordern, gemäss Def. IIIa ein oder mehrere durch sie gehende Parallelebenenpaare unendlich grossen Abstandes. Solcher gibt es zwei Arten:

1) bestehend aus zwei parallelen isotropen Ebenen (Satz VIIa).

2) bestehend aus einer endlichen Ebene und ε_∞. — Die erste Art führt uns zu einer ganz allgemeinen Definition eines Geradenpaares unendlich grossen Abstandes. Sind nämlich ι und ι' zwei isotrope Ebenen, welche durch die selbe Tangente j_∞ von $\mathfrak{K}_a^2$ gehen, so haben zwei beliebige in ι bezw. ι' gelegene Geraden g bezw. g′ nach (VIIa) unendlich grossen Abstand. Sowohl g als g′ aber schneiden j_∞, also dieselbe Tangente von $\mathfrak{K}_a^2$. Und da auch umgekehrt zwei Geraden g und g′, welche dieselbe Tangente j_∞ von $\mathfrak{K}_a^2$ schneiden, den Abstand ∞ liefern, weil ihr aus den isotropen Ebenen $[g \mid j_\infty]$ und $[g' \mid j_\infty]$ bestehendes Parallelebenenpaar den Abstand ∞ hat, so können wir definieren:

Definition IV. Zwei Geraden unendlich grossen Abstandes sind solche Geraden, *welche dieselbe Tangente der absoluten Kurve treffen.*[1])

Dieser Definition fügen sich ersichtlich auch zwei Geraden, deren Parallelebenenpaar aus ε_∞ und einer (eigentlich ∞ [1]) endlichen Ebene besteht, also zwei Geraden g′ und g_∞, von denen die eine in ε_∞ liegt, während die andere eine sie nicht schneidende endliche Gerade ist; denn g_∞ schneidet die beiden von g′ getroffenen Tangenten von $\mathfrak{K}_a^2$ (also doppelte Erfüllung der in Def. IV liegenden Bedingung).

Ebenso erkennt man ohne weiteres, dass die Geradenpaare unbestimmten Abstandes, bestehend aus zwei parallelen Geraden oder aus zwei Geraden derselben isotropen Ebene (Satz (VIII) und (IX)) der in Def. IV liegenden Forderung Genüge tun.

Es sei noch erwähnt, dass für zwei Geraden, welche nach Def. IV den Abstand ∞ haben, auch die Def. IIIb

[1]) Diese Definition verdanke ich Herrn Geheimrat Sturm

unendlich grossen Abstand liefert. Denn schneiden zwei Geraden g und g′ die Tangente j_∞ von $\mathfrak{K}_a^2$, so ist sowohl g_∞ als g'_∞ eine Gerade, welche durch den Berührungspunkt von j_∞ mit $\mathfrak{K}_a^2$ geht. Also ist $(g_\infty \mid g'_\infty)$ dieser auf j_∞ liegende Berührungspunkt, und der von ihm an [g g′] gehende Treffstrahl ist die Gerade j_∞ selbst, auf welcher g und g′ ersichtlich eine unendlich grosse Strecke als ihren Abstand begrenzen.

Schneidet eine Gerade g die beiden Tangenten $j_{1,\infty}$ und $j_{2,\infty}$ von $\mathfrak{K}_a^2$, so hat der Rotationscylinder unendlich grossen Halbmessers, dessen Axe g ist, zu Tangentialebenen die sämtlichen durch $j_{1,\infty}$ und $j_{2,\infty}$ gehenden Ebenen. Alle in diesen Ebenen liegenden Geraden haben nach Def. IV von g den Abstand ∞. Daraus folgt, dass Def. IIIc auch für $e = \infty$ gilt[1]).

Da es also zu jeder Geraden g ∞^3 (den quadratischen Complex $[g]_e^2$ bildende) Geraden gibt, die von g den Abstand e haben, welchen Wert auch e habe möge, so gibt es $\infty^{4+3} = \infty^7$ Strahlenpaare eines gegebenen Abstandes, d. h., da ∞^8 Strahlenpaare im Raume vorhanden sind:

(X). Die Bedingung, dass der einem Strahlenpaare zukommende Abstand eine gegebene Grösse habe, ist für die ∞^8 Strahlenpaare des Raumes eine einfache.

II. Kapitel.

I. Abschnitt.

Die e-Punkte einer Punktinvolution.

Auf einer Geraden g sei eine quadratische Punktinvolution I gegeben. Unter einem e-Punkte von I wollen wir einen

---

[1]) Der oben erwähnte Rotationscylinder unendlich grossen Halbmessers, d. i. der doppelt gerechnete unendlich ferne Strahlenbüschel mit dem Scheitel auf g, ist die eine Ausartung in der Büschel-Schar der sämtlichen Rotationscylinder, welche g zur Rotationsaxe haben. Die zu den Flächen dieser Büschel-Schar gehörenden Tangentencom-

Punkt E verstehen, der von seinem ihm in I gepaarten Punkte E′ den gegebenen Abstand $EE' = e$ hat. E′ ist ebenfalls ein e-Punkt von I. E und E′ zusammen wollen wir als ein e-Paar von I bezeichnen.

Wir wollen die Anzahl solcher e-Punkte in I bestimmen und stellen hierzu folgende Correspondenz in g her: Einem beliebigen Punkte $P \equiv \mathfrak{P}$ von g, dessen in I gepaarter Punkt P′ ist, ordnen wir die beiden Punkte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ von g zu, die von P′ den Abstand e haben. Sind P'_1 und P'_2 diejenigen Punkte von g, die von $\mathfrak{P} \equiv P$ den Abstand e haben, so sind die ihnen in I gepaarten Punkte P_1 bezw. P_2 die dem Punkte $\mathfrak{P} \equiv P$ im andern Sinne entsprechenden Punkte. Somit besteht zwischen den Punktreihen P und $\mathfrak{P}$ eine Correspondenz [2,2]. Ihre vier Coincidenzelemente haben von den ihnen in I gepaarten Punkten den Abstand e, sind also e-Punkte, und da diese nur gepaart auftreten, so folgt:

(*1*). *In einer geraden quadratischen Punktinvolution gibt es im Allgemeinen zwei* e-*Paare.*

Wir wollen sie mit EE', $E_1E'_1$ bezeichnen. Ist M der Centralpunkt, $\varepsilon p^2 (\varepsilon = \pm 1)$ die Potenz von I, so ergeben sich die Abscissen der e-Punkte aus den Gleichungen: $MX \cdot MX' = \varepsilon p^2$, $MX' - MX = e$. So ist z. B.:

$$ME = +\sqrt{\frac{e^2}{4} + \varepsilon p^2} - \frac{e}{2}.$$

Bei hyperbolischen Involutionen sind die e-Punkte, wie aus ihrer analytischen Darstellung folgt, stets sämtlich reell. Für $e = 0$ geht das eine e-Paar in den einen, das andere e-Paar in den andern Doppelpunkt von I über. Für $e = \infty$ vereinigen sich die beiden inneren e-Punkte E und E_1 mit M,

---

plexe $[g]^2_e$ bilden einen Complexbüschel, dessen Grundcongruenz (4,4) aus sämtlichen Geraden besteht, welche von g unbestimmten Abstand haben, nämlich den Strahlen der beiden Strahlenfelder $[g \mid j_1, \infty]$ und $[g \mid j_2, \infty]$ und dem Bündel der zu g parallelen Geraden. Letzterer bildet, vierfach gerechnet, die Ordnungs-Grundkongruenz; die Strahlenfelder $[g \mid j_1, \infty]$ und $[g \mid j_2, \infty]$ bilden, je doppelt gerechnet, die Klassen-Grundcongruenz.

die beiden äusseren, E' und E'_1, fallen mit dem unendlich fernen Punkte M'_∞ von g zusammen.

Bei elliptischen Involutionen sind sämtliche e-Punkte reell, solange $e \geqq PP'$, wo unter P und P' die Potenzpunkte von I verstanden werden. Ist $e = PP'$, so fallen der obigen Gleichung zufolge E und E'_1 mit P', E' und E_1 mit P zusammen. Für $e < PP'$ sind sämtliche e-Punkte imaginär.

Aus der analytischen Darstellung der e-Punkte folgt noch, dass die beiden e-Paare zu einander bezüglich M symmetrisch sind, was auch unmittelbar klar ist.

Der über I stehende Kreisbüschel ermöglicht eine Construktion der e-Punkte durch seine beiden e-Kreise, wenn als solche seine beiden Kreise mit dem Durchmesser e bezeichnet werden. Der Wurzelausdruck $r = \pm \sqrt{\frac{e}{4} + \varepsilon p^2}$ bedeutet nämlich die Abscissen der Mittelpunkte der beiden e-Kreise. Sie sind mittels eines rechtwinkligen Dreiecks zu zeichnen.

Ist I eine parabolische Involution mit dem endlichen singulären Punkte M, so fallen die beiden inneren e-Punkte, E und E_1, mit M zusammen, die beiden äusseren, E' und E'_1. sind die beiden im Abstande e von M entfernten Punkte von g,

In einer auf g liegenden parabolischen Involution, deren singulärer Punkt der unendlich ferne Punkt M_∞ von g ist, sind jedenfalls die beiden inneren e-Punkte, E und E_1, wie im eben behandelten Falle, mit M_∞ vereinigt. Die beiden äusseren, E' und E'_1, sind dann die von M_∞ um den endlichen gegebenen Abstand e entfernten Punkte von g und fallen also nach Satz (I), ebenfalls mit M_∞ zusammen.

Schliesslich betrachten wir noch eine hyperbolisch-gleichseitige Involution, deren Doppelpunkte der endliche Punkt D und der unendlich ferne Punkt D_∞ von g seien. Das eine e-Paar besteht offenbar aus den beiden Punkten, die von D den Abstand $\frac{e}{2}$ haben. Das andere e-Paar gewinnt man durch folgende Betrachtung: Eine hyperbolisch-gleichseitige In-

volution kann man sich dadurch aus einer gewöhnlichen hyperbolischen Involution entstanden denken, dass man den einen Doppelpunkt derselben festhält und den andern auf g ins Unendliche wandern lässt. Dabei nimmt dieser Doppelpunkt, welcher zwischen den Punkten des einen e-Paares, etwa $E_1 E'_1$, liegt, dieses e-Paar selbst mit, und die Strecke $E_1 E'_1 = e$ verschwindet mit dem Doppelpunkte im Unendlichen. Daraus folgt, dass in einer hyperbolisch-gleichseitigen Involution das eine e-Paar mit deren unendlich fernem Doppelpunkte vereinigt ist. —

Der Begriff der e-Paare kann ohne weiteres auf Parallelstrahlen- und Parallelebeneninvolutionen ausgedehnt werden. Die gefundenen Resultate übertragen sich ohne Schwierigkeit.

II. Abschnitt.

Die e-Pole und e-Polaren eines Polarfeldes.

§ 1. In einer Ebene γ sei ein beliebiges Polarfeld[1]) gegeben. Einen Unterschied zwischen Polarfeldern mit reeller und solchen mit reell-imaginärer Basiskurve machen wir vorläufig nicht, setzen aber das Polarfeld als allgemein voraus, indem wir ausgeartete Gebilde hier wie auch im Folgenden grundsätzlich ausschliessen.

Jeder Punkt des Polarfeldes hat von seiner Polare einen gewissen Abstand (vgl. Def. I, S. 12). Diejenigen Punkte von γ, die von ihren Polaren den gegebenen Abstand e haben, werden einen gewissen geometrischen Ort, eine Kurve, erfüllen. Die zu dieser Kurve polare wird gebildet durch die Geraden des Polarfeldes, die von ihren Polen den gegebenen Abstand e haben. Da die Ordnung der Punktkurve gleich der Klasse ihrer polaren Geradenkurve ist, so genügt es, etwa die Ordnung der Punktkurve zu bestimmen.

Zu diesem Zwecke betrachten wir eine beliebige Gerade g von γ. Die auf ihr liegende Involution conjugierter Punkte

---

[1]) Bezüglich der Definition des Begriffes „Polarfeld“ vergl.: R. Sturm, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften. Bd. II § 48.

werde mit J(g) bezeichnet[1]). Bewegt sich ein Punkt P auf g, so geht seine Polare p stets durch den Pol G von g. Alle Geraden, die von P den gegebenen Abstand e haben, sind Tangenten des mit dem Radius e um P geschlagenen Kreises K_e^2. Die von G aus an K_e^2 gehenden Tangenten mögen g in den Punkten P_1 und P_2 schneiden. Die ihnen in J(g) gepaarten Punkte P'_1 bezw. P'_2, d. h. die Pole der Tangenten ordnen wir dem P zu. Die dem Punkte P im andern Sinne entsprechenden Punkte von g haben dann die Eigenschaft, Mittelpunkte von Kreisen mit dem Radius e zu sein, für welche die Polare p von P Tangente ist. Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise mit dem Radius e, die p zur Tangente haben, besteht aus den beiden Parallelen zu p, die von p den ebenen Abstand e haben. Diese beiden Parallelen schneiden in g die Punkte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ ein, welche die dem Punkte P im anderen Sinne entsprechenden sind.

Es ist somit in g eine Verwandtschaft [2,2] festgelegt, welche mit V(g) bezeichnet werde, und deren vier Coincidenzelemente $C_1 \ldots C_4$ diejenigen Punkte von g sind, die von ihren Polaren c_1 bezw. c_2, c_3, c_4 den gegebenen Abstand e haben, d. h.

(*2a*). *Der geometrische Ort der Punkte eines Polarfeldes, die von ihren Polaren den gegebenen Abstand* e *haben, ist eine Kurve vierter Ordnung.*

Diese Kurve soll künftig mit C_e^4 bezeichnet werden, ihre Punkte wollen wir e-Pole nennen.

Dual ergibt sich, dass die Geraden $c_1 \ldots c_4$ diejenigen Geraden durch G sind, die von ihren Polen C_1 bezw. C_2, C_3, C_4 den gegebenen Abstand e haben. Bezeichnen wir solche Geraden als e-Polaren des Polarfeldes, die von ihnen gebildete Kurve mit K_e^{IV}, so besteht der Satz:

(*2b*). *Die* e-*Polaren eines Polarfeldes umhüllen eine Kurve vierter Klasse* K_e^{IV}, *die zur* C_e^4-*Kurve des Polarfeldes polare Kurve.*

---

[1]) Entsprechend bedeute J(G) die Involution conjugierter Strahlen um den Punkt G.

Wir schliessen hier gleich die analytische Lösung des vorliegenden Problems an. Die Gleichung eines Kegelschnittes mit endlichem Mittelpunkte lautet, auf die Axen des Kegelschnitts als Kartesische Coordinatenaxen bezogen:

$\frac{x^2}{\mathfrak{a}} + \frac{y^2}{\mathfrak{b}} = 1$, wo $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die algebraischen Werte der Potenzen der auf den Axen a und b liegenden Involutionen J(a) und J(b) bedeuten. Die Polare eines beliebigen Punktes (x_1, y_1) der Ebene in Bezug auf den Kegelschnitt hat die Gleichung: $\frac{xx_1}{\mathfrak{a}} + \frac{yy_1}{\mathfrak{b}} = 1$, oder $xx_1.\mathfrak{b} + yy_1.\mathfrak{a} - \mathfrak{a}.\mathfrak{b} = 0$. Die Entfernung des Punktes (x_1, y_1) von dieser seiner Polaren ist gegeben durch den Ausdruck: $\frac{x_1^2.\mathfrak{b} + y_1^2.\mathfrak{a} - \mathfrak{a}.\mathfrak{b}}{\sqrt{x_1^2\mathfrak{b}^2 + y_1^2.\mathfrak{a}^2}}$. Also lautet die Gleichung des Ortes der Punkte, für welche dieser Abstand den gegebenen Wert e hat, wenn statt x_1 y_1 die beweglichen Punktcoordinaten xy gesetzt werden:

$$e = \frac{x^2\mathfrak{b} + y^2.\mathfrak{a} - \mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\sqrt{x^2\mathfrak{b}^2 + y^2.\mathfrak{a}^2}}, \text{ oder:}$$

$(x^2\mathfrak{b} + y^2\mathfrak{a})^2 - x^2\mathfrak{b}^2(2\mathfrak{a} + e^2) - y^2\mathfrak{a}^2(2\mathfrak{b} + e^2) + \mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2 = 0$, welche durch ihren Grad „4“ Satz (2a) bestätigt.

§ 2. Die Doppelpunkte der C_e^4-Kurve.

Im Folgenden werden wir die C_e^4-Kurve bevorzugen, da die Eigenschaften der K_e^{IV}-Kurve zumeist durch Dualisieren aus denen der C_e^4-Kurve folgen.

Die unendlich fernen Punkte S_∞ und T_∞ der (reellen oder reell-imaginären) Basiskurve des Polarfeldes liegen auf ihren Polaren s bezw. t, den Asymptoten, und haben also nach Satz (IV), S. 13 von diesen jeden beliebigen Abstand e von $e = 0$ bis $e = \infty$; sie liegen daher auf jeder C_e^4-Kurve des Polarfeldes, welchen Wert auch e haben möge. Nach Satz (IVb) gilt das auch in dem Falle, dass die Basiskurve eine Parabel ist. Wir haben somit den allgemeinen Satz:

(3). *Die unendlich fernen Punkte* S_∞ *und* T_∞ *der Basiskurve eines Polarfeldes sind sämtlichen* C_e^4*-Kurven desselben gemein, welchen Wert man auch* e *erteilt.*

Da jeder andere reelle oder imaginäre Punkt der unendlich fernen Geraden g_∞ von γ, ausser S_∞ und T_∞, von seiner Polaren unendlich grossen Abstand hat, so hat g_∞ mit einer beliebigen C_e^4-Kurve nur die Punkte S_∞ und T_∞ gemein. Dies zeigt auch die Gleichung der C_e^4-Kurve, deren homogene Form:

$$[x_1{}^2\mathfrak{b} + x_2{}^2\mathfrak{a} - x_3{}^2\mathfrak{a}\mathfrak{b}]^2 - e^2x_3{}^2[x_1{}^2\mathfrak{b}^2 + x_2{}^2\mathfrak{a}^2] = 0$$

für $x_3 = 0$ die unendlich fernen Punkte der C_e^4-Kurve liefert. Sie sind in der Tat, doppelt gerechnet, dieselben wie die des zu Grunde liegenden Kegelschnittes: $\frac{x_1{}^2}{\mathfrak{a}} + \frac{x_2{}^2}{\mathfrak{b}} - x^2{}_3 = 0$.

Dass S_∞ und T_∞ als Schnittpunkte von g mit C_e^4 doppelt zu rechnen sind, findet seine Erklärung darin, dass sich S_∞ und T_∞ als Doppelpunkte der C_e^4 erweisen lassen.

Ist der Punkt S_∞ Doppelpunkt der C_e^4, so muss er auf jeder durch ihn gehenden Geraden g doppelte Coincidenz von V(g) sein. Zur Erkennung einer doppelten Coincidenz unserer Verwandtschaft [2,2] bedienen wir uns eines Criteriums, das wir im Folgenden noch mehrfach brauchen werden und künftig als Criterium (A) zitieren wollen. Es findet sich in: R. Sturm, „Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften" Bd. I, Art. 187, und sagt aus, dass ein Element dann doppelte Coincidenz einer Verwandtschaft [n, n_1] ist, „wenn sich mit ihm sowohl zwei von den ihm in dem einen, als zwei von den ihm im andern Sinne entsprechenden Elementen vereinigen" [1]). — Wenden wir nun das Criterium (A) auf die Verwandtschaft V(g) einer beliebigen durch S_∞ gehenden Geraden g und speziell auf den Punkt S_∞ an, so haben wir die dem Punkte S_∞ in beiderlei Sinne entsprechenden Punkte aufzusuchen. Wir haben zunächst um S_∞ den Kreis K_e^2 mit dem Radius e zu schlagen und von dem auf der Asymptote s liegenden Pole G der Geraden g aus die Tangenten

[1]) Es sei erwähnt, dass diese Bedingung für eine doppelte Coincidenz einer Verwandtschaft [n, n_1] nicht notwendig, aber hinreichend ist. Vgl. weiter unten.

an K_e^2 zu legen: deren Pole sind die dem S_∞ im einen Sinne entsprechenden Punkte von g. K_e^2 nun reduciert sich nach Satz (I), S. 10 auf S_∞, die von G an K_e^2 gehenden Tangenten fallen mit s zusammen, ihre Pole sind mit S_∞ identisch: S_∞ coincidiert mit den beiden ihm im einen Sinne in V(g) entsprechenden Punkten. — Wir haben ferner die beiden Punkte von g zu bestimmen, die von der Polare s von S_∞ den Abstand e haben. Sie werden in g eingeschnitten durch die beiden zu s im ebenen Abstand e parallelen Geraden s′ und s'_1. Da auch g ∥ s ist, so schneiden s′ und s'_1 beide die Gerade g in S_∞. Der Punkt S_∞ fällt also auch mit den beiden ihm im andern Sinne in V(g) entsprechenden Punkten von g zusammen und ist somit doppelte Coincidenz von V(g). Und da dies für alle Geraden durch S_∞ gilt, so ist S_∞ Doppelpunkt der C_e^4, wie auch ebenso T_∞. Ergebnis:

(*4a*). *Die* C_e^4 *eines Polarfeldes hat die beiden unendlich fernen Punkte* S_∞ *und* T_∞ *der Basiskurve des Polarfeldes zu Doppelpunkten.*

Die obige Betrachtung, welche zur Erkenntnis der Duplicität von S_∞ und T_∞ auf der C_e^4 führte, ist auch dann noch anzustellen, wenn die Basiskurve des Polarfeldes eine Parabel ist. Nur ist dann noch Satz (II), S. 11 heranzuziehen.

Somit gilt Satz (4a) ganz allgemein. Dual folgt:

(*4b*). *Die* K_e^{IV}*-Kurve eines Polarfeldes hat die Asymptoten der Basiskurve desselben zu Doppeltangenten.*

§ 3. Die beiden Grenzfälle e = 0 und e = ∞.

1) e = 0. Die gegebene Grösse e kann in Polarfeldern mit reeller Basiskurve alle Werte von 0 bis ∞ annehmen. Für e = 0 ergibt sich als Punktort die Basiskurve des Polarfeldes, die also doppelt zu zählen ist. In der Tat geht die Gleichung der C_e^4-Kurve für e = 0 in die Gleichung

$$[x^2b + y^2a - ab]^2 = 0$$

über, welche die Gleichung des doppelt zu rechnenden Basiskegelschnittes des Polarfeldes darstellt:

(*5a*). *Ein Polarfeld mit reellem Basiskegelschnitt hat diesen, doppelt gerechnet, zur* C_e^4*-Kurve für den Wert* $e = 0$.

Als Strahlenort der Nullpolaren, wie man sie nennen kann, erhält man, dual, den Tangentenbüschel der Basiskurve, der ebenfalls doppelt zu rechnen ist:

(*5b*). *Die* K_0^{IV}*-Kurve eines Polarfeldes mit reeller Basiskurve ist der doppelt gerechnete Tangentenbüschel dieses Basiskegelschnitts.*

Beide Sätze (5) bestätigen die Sätze (4) für $e = 0$.

In einem Polarfelde mit einer reell-imaginären Basiskurve ist die C_0^4 sowohl wie die K_0^{IV} imaginär.

2). $e = \infty$. Bei der Behandlung der C_∞^4-Kurve wollen wir gleich von vornherein den analytischen Weg einschlagen. Um die Gleichung der C_∞^4-Kurve zu finden, dividieren wir die homogene Form der allgemeinen Gleichung der C_e^4-Kurve:

$$[x_1^2 b + x_2^2 a - x_3^2 ab]^2 - e^2 x_3^2 . [x_1^2 b^2 + x_2^2 a^2] = 0$$

durch e^2 und setzen hierauf $e = \infty$. Dann ergibt sich: $x_3^2 . [x_1^2 b^2 + x_2^2 a^2] = 0$ als Gleichung der C_∞^4. Sie zerfällt in zwei Faktoren: $x_3^2 = 0$ und $x_1^2 b^2 + x_2^2 a^2 = 0$, deren erster die doppelt zu rechnende unendlich ferne Gerade darstellt, während die Gleichung $x_1^2 b^2 + x_2^2 a^2 = 0$ oder $\frac{x_1}{x_2} = \pm i . \frac{a}{b}$ zwei durch den Mittelpunkt M des Polarfeldes gehende conjugiert imaginäre Geraden i_1 und i_2 bedeutet. Diese beiden Geraden erweisen sich als die Polaren der beiden absoluten Punkte $I_{1,\infty}$ und $I_{2,\infty}$ der Ebene γ. In der Tat haben letztere die Coordinaten:

$$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : i : 0 \quad \text{und} \quad x_1 : x_2 : x_3 = 1 : -i : 0.$$

Setzt man diese Coordinaten in die Polarengleichung: $\frac{x_1 \cdot \bar{x}_1}{a} + \frac{x_2 \bar{x}_2}{b} - x_3 \bar{x}_3 = 0$ für $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$ ein, so folgt:

$$\frac{x_1}{a} + i \frac{x_2}{b} = 0 : \frac{x_1}{x_2} = -i . \frac{a}{b}; \qquad \frac{x_1}{a} - i . \frac{x_2}{b} = 0 : \frac{x_1}{x_2} = +i . \frac{a}{b}.$$

Ergebnis:

(*6a*). *Die* C_∞^4 *eines Polarfeldes besteht aus der doppelt gerechneten unendlich fernen Geraden des Polarfeldes und den Polaren der beiden absoluten Punkte.*

Auch geometrisch ist der Satz unmittelbar einzusehen. Er gilt auch für parabolische Polarfelder. Im Falle eines Polarfeldes in Bezug auf einen Kreis sind die Polaren der absoluten Punkte ihre Verbindungslinien mit dem Mittelpunkte, also die isotropen Strahlen durch den Mittelpunkt.

Durch Polarisieren der C^4_∞ wird die K^{IV}_∞ erhalten: die Polaren der Punkte von g_∞ sind die Durchmesser, welche doppelt zu rechnen sind, da ihre Pole als Punkte der C^4_∞ doppelt zählen. Die übrigen ∞-Polaren des Polarfeldes sind die Polaren der Punkte von i_1 und i_2 und gehen also durch deren Pole, die absoluten Punkte $I_{1,\infty}$ und $I_{2,\infty}$ d. h. sie sind isotrope Strahlen. Dies stimmt auch zu Satz (V), S. 13. Ergebnis:

(*6b*). *Die* K^{IV}_∞ *eines Polarfeldes besteht aus dem doppelt gerechneten Durchmesserbüschel und den beiden Büscheln von isotropen Strahlen des Polarfeldes.*

Letztere beiden Büschel enthalten als Doppelstrahl die unendlich ferne Gerade, was sich polar zu der Tatsache fügt, dass die C^4_∞ den Mittelpunkt des Polarfeldes zum Doppelpunkt des imaginären Geradenpaares i_1 und i_2 hat.

§ 4. Die Grundpunkte des Büschels der C^4_e-Kurven des Polarfeldes.

Durch jeden Punkt P des Polarfeldes ist im allgemeinen eine einzige durch ihn gehende C^4_e-Kurve bestimmt, diejenige, deren Parameter e gleich dem Abstande des Punktes P von seiner Polare ist. Dies weist darauf hin, dass die C^4_e-Kurven des Polarfeldes für alle Werte von e einen Kurvenbüschel und entsprechend die K^{IV}_e-Kurven eine Kurvenschar bilden. Unmittelbar ist die Büscheleigenschaft der C^4_e-Kurven an deren Gleichung zu erkennen:

$$[x_1^2\mathfrak{b} + x_2^2\mathfrak{a} - x_3^2\mathfrak{a}\mathfrak{b}]^2 - e^2.[x_3^2(x_1^2\mathfrak{b}^2 + x_2\mathfrak{a}^2)] = 0,$$

in welcher ein Parameter e^2 auftritt, der durch jeden seiner Werte eine C^4_e-Kurve eindeutig bestimmt. Die Gleichung zeigt bereits die Form: $f - \lambda f_1 = 0$. Hierbei ist $\lambda = e^2$.

Durch Nullsetzen von f und f_1 erhält man die Constituenten des Büschels der C_e^4-Kurven:

$$[x_1^2\mathfrak{b} + x_2^2\mathfrak{a} - x_3^2\mathfrak{a}\mathfrak{b}]^2 = 0:$$

dies ist die Gleichung der C_∞^4-Kurve, und: $x_3^2(x_1^2\mathfrak{b}^2+x_2^2\mathfrak{a}^2)=0$, welches die Gleichung der C_∞^4-Kurve ist. Somit ergeben sich als Constituenten des Büschels der C_e^4-Kurven die beiden extremen C_e^4-Kurven, denen die Parameterwerte $e = 0$ ($e^2 = 0$) und $e = \infty$ ($e^2 = \infty$) zukommen.

Der Büschel der C_e^4-Kurven hat 16 Grundpunkte. Die beiden unendlich fernen Punkte S_∞ und Γ_∞ des Basiskegelschnitts sind Doppelpunkte für alle Kurven des Büschels (Satz (4a)), jeder von ihnen zählt als Schnittpunkt zweier C_e^4-Kurven für vier einfache Schnittpunkte[1]), beide zusammen stellen also 8 Grundpunkte des Büschels dar. Sie sind die Schnittpunkte der Constituente: $[x_1^2\mathfrak{b} + x_2^2\mathfrak{a} - x_3^2\mathfrak{a}\mathfrak{b}]^2 = 0$ mit dem Teile $x_3^2 = 0$ der zweiten Constituente,

$$x_3^2(x_1^2\mathfrak{b}^2 + x_2^2\mathfrak{a}^2) = 0. \quad \text{(Vgl. S. 31).}$$

Die 8 andern Grundpunkte müssen die Schnittpunkte des als C_0^4-Kurve doppelt gerechneten Basiskegelschnitts $\mathfrak{K}^2$ mit i_1 und i_2 sein. Diese beiden Kegelschnitte schneiden einander in vier imaginären Punkten $J_1 \ldots J_4$. Sie sind mit ihren Polaren, den isotropen Geraden j_1 bezw. j_2, j_3, j_4 incident und haben also nach Satz (V), S. 13 von diesen jeden beliebigen Abstand. Somit gehören sie in der Tat allen C_e^4-Kurven an. Insofern nun $\mathfrak{K}^2$ als C_0^4 doppelt zu zählen ist, muss jeder der Schnittpunkte $J_1 \ldots J_4$ als doppelter Schnittpunkt von $\mathfrak{K}^2$ mit dem Geradenpaare (i_1, i_2) aufgefasst werden, und man muss i_1 und i_2 als (Doppel-)Tangenten der Doppelkurve C_0^4 ansehen. Da sich nun die beiden Constituenten des Büschels in $J_1 \ldots J_4$ berühren, so bleibt noch übrig zu zeigen, dass auch die andern C_e^4-Kurven, die ja sämtlich durch die abstandsindifferenten Punkte $J_1 \ldots J_4$ gehen,

[1]) Cremona, Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Kurven. 1865. Art. 32a).

diese beiden Constituenten und also auch einander in $J_1 \ldots J_4$ berühren. Es genügt, zu zeigen, dass eine beliebige C_e^4 von den Geraden i_1 und i_2 in bezw. J_1, J_2; J_3, J_4 berührt wird. Die Berührung mit C_0^4 ist dann selbstverständlich.

Die Gerade i_1 berührt jedenfalls eine beliebige C_e^4 in J_1 und J_2, wenn J_1 und J_2 sich als doppelte Coincidenzen von $V(i_1)$ nachweisen lassen. Wir schlagen um J_1 den Kreis K_e^2 mit dem Radius e. An ihn haben wir von dem Pole $I_{1,\infty}$, von i_1 aus die Tangenten zu legen, deren Pole in Bezug auf $\mathfrak{K}^2$ die dem Punkte J_1 im einen Sinne in $V(i_1)$ entsprechenden Punkte sind. Nun liegt $I_{1,\infty}$ auf K_e^2, die von $I_{1,\infty}$ an K_e^2 gehenden Tangenten fallen in die Tangente j_1 an K_e^2 im Punkte $I_{1,\infty}$ zusammen. Der Pol von j_1 aber ist der Punkt J_1 selbst, ihr Berührungspunkt mit $\mathfrak{K}^2$, d. h. J_1 fällt mit den beiden ihm im einen Sinne in $V(i_1)$ entsprechenden Punkten zusammen. — Wir haben ferner zur Polaren j_1 von J_1, der Tangente in J_1 an die Basis $\mathfrak{K}^2$, die beiden Parallelen im ebenen Abstande e zu legen. Nun vereinigt j_1 als isotroper Strahl in sich alle zu j_1 in beliebigem ebenen Abstande parallelen Geraden (Satz (Vb)), also fällt J_1 auch mit den beiden ihm im andern Sinne in $V(i_1)$ entsprechenden Punkten zusammen und ist somit vermöge Criterium (A) eine doppelte Coincidenz von $V(i_1)$. Dasselbe lässt sich für J_2 beweisen, und i_1 berührt also jede C_e^4 in J_1 und J_2. Alle C_e^4-Kurven also berühren einander in $J_1 \ldots J_4$, und diese Punkte bilden, als gemeinsame Berührungspunkte doppelt gerechnet, die noch fehlenden 8 Grundpunkte des C_e^4-Kurven-Büschels. Ergebnis:

(7). *Die C_e^4-Kurven eines Polarfeldes bilden einen Büschel von Kurven vierter Ordnung, die die beiden unendlich fernen Punkte S_∞ und T_∞ des Basiskegelschnittes $\mathfrak{K}^2$ des Polarfeldes zu gemeinsamen Doppelpunkten haben und sich in den vier Punkten berühren, in welchen $\mathfrak{K}^2$ von den Polaren der absoluten Punkte der Ebene geschnitten wird. Sämtliche Kurven des Büschels haben die Polaren der beiden absoluten Punkte zu Doppeltangenten.*

Duales gilt für die K_e^{IV}-Kurven. Sie bilden eine Kurvenschar, deren sämtliche Kurven ausser den beiden Asymptoten des Basiskegelschnitts, welche Doppeltangenten für jede K_e^{IV}-Kurve sind, noch die 4 isotropen Strahlen $j_1 \ldots j_4$ gemein haben. Diese sind als gemeinsame Tangenten der K_e^{IV}-Kurven doppelt zu rechnen, da sie jede derselben in demselben Punkte berühren: j_1 und j_2 in $I_{1,\infty}$, j_3 und j_4 in $I_{2,\infty}$, woraus folgt, dass die absoluten Punkte der Ebene Doppelpunkte für jede K_e^{IV}-Kurve sind. Dies steht der Tatsache dual gegenüber, dass i_1 und i_2 Doppeltangenten jeder C_e^4-Kurve sind.

Anmerkung: Der Parameter e geht in die Gleichung der C_e^4-Kurve quadratisch ein, d. h. es ist gleichgültig, ob man den Abstand eines Punktes von einer Geraden als positiv oder negativ ansieht, in beiden Fällen ergibt sich dieselbe C_e^4-Kurve. Sämtliche positiven Werte des Büschelparameters e^2 liefern nun sämtliche C_e^4-Kurven. Vervollständigt wird der Büschel durch die den negativen Werten von e^2 entsprechenden Kurven. Diese sind sämtlich völlig imaginär, da die dann entstehende Gleichung nur positive quadratische Glieder enthält und also durch keine reellen Zahlenwerte von x und y befriedigt werden kann. Auch können diese Kurven nicht mehr im eigentlichen Sinne als C_e^4-Kurven bezeichnet werden.

§ 5. Allgemeine Eigenschaften der C_e^4, Konstruktion derselben.

Im Folgenden wollen wir annehmen, dass das Polarfeld einen endlichen Mittelpunkt M habe, in dem sich die beiden Axen a und b schneiden. Dann folgt aus der Symmetrie des Polarfeldes in Bezug auf a und b, dass auch die C_e^4-Kurven und K_e^{IV}-Kurven a und b zu Symmetrieaxen haben und folglich auch in Bezug auf M symmetrisch liegen.

Es sei P ein beliebiger Punkt der C_e^4, der mit M verbunden den Durchmesser d liefert. Dann berührt die Polare p

von P die K_e^{IV}. Die Polare p′ des Punktes $(d \mid p) = P'$ geht, da P und P′ in J(d) gepaart sind, durch P und parallel zu p sowohl als zu dem d conjugierten Durchmesser d′. Demnach ist P′ von seiner Polare p′ ebenfalls um die gegebene Strecke e entfernt, liegt also ebenfalls auf C_e^4, und p′ berührt K_e^{IV}. Aus Symmetriegründen schneidet d die C_4^e in zwei weiteren Punkten P_1 und P_1', die zu P bezw. P′ bezüglich M symmetrisch sind, sodass $PM = MP_1$ und $P'M = MP'_1$. Dabei werden P und P′ bezw. P_1 und P'_1 auf derselben oder auf verschiedenen Seiten von M liegen, je nachdem J(d) hyperbolisch oder elliptisch ist.

Die vier Schnittpunkte eines jeden Durchmessers d mit der C_e^4 bilden also zwei Paare von J(d), welche symmetrisch zu einander in Bezug auf M sind. Dadurch sind die Durchmesser vor allen andern Geraden des Polarfeldes ausgezeichnet. Denn von den vier Schnittpunkten $C_1 .. C_4$ einer beliebigen Geraden g mit C_e^4 sind im Allgemeinen keine zwei in J(g) gepaart, vielmehr bilden die den Punkten $C_1 .. C_4$ in J(g) gepaarten Punkte $C'_1 .. C'_4$ einen von jenem Wurfe völlig verschiedenen Punktwurf. Der Fall, dass von den Punkten $C_1 .. C_4$ zwei in J(g) gepaart sind, sodass die vier Punkte etwa C_1, C'_1, C_2, C_3 heissen, wird im Allgemeinen ∞^1 mal auftreten, ist aber hier ohne Interesse. Bilden aber die Punkte $C_1 .. C_4$ zwei Paare in J(g): C_1, C'_1, C_2, C'_2, so führt die Annahme, dass der Pol G von g ein endlicher Punkt sei, zu der absurden Bedingung, dass G gleichzeitig auf zwei parallelen Geraden liegen muss, nämlich sowohl auf der Mittelsenkrechten von $C_1 C'_1$ als auf der von $C_2 C'_2$. Also folgt:

(8). *Die Durchmesser des Polarfeldes sind die einzigen Geraden der Ebene, deren Schnittpunkte mit* C_e^4 *zwei Paare der auf ihnen gelegenen Involution conjugierter Punkte bilden.*

Ist φ der Winkel, den die beiden conjugierten Durchmesser d und d′ mit einander bilden, so ist offenbar:

$$PP' = P_1 P'_1 = \frac{e}{\sin \varphi} = \bar{e},$$

d. h. die Schnittpunkte von d mit C_e^4 sind zu construieren als die $\bar{e}$-Paare von J(d), wo $\bar{e}$ die durch die obige Gleichung bestimmte Grösse hat. Damit ist eine Construction der C_e^4 mit Hilfe ihrer Schnittpunkte mit den Durchmessern des Polarfeldes gefunden. $\bar{e}$ wird im allgemeinen grösser als e sein. Es ist $\bar{e} = e$ nur, wenn $\sin \varphi = 1$, $\varphi = 90^0$, d. h. nur auf den Axen a und b sind die Schnittpunkte derselben mit C_e^4 die e-Paare der Involution J(a) bezw. J(b). Dass die Schnittpunkte z. B. der a-Axe mit C_e^4 die e-Punkte von J(a) sind, ist auch unmittelbar einzusehen, wenn man sich vergegenwärtigt, dass die Polare p eines Punktes P auf a im Punkte P′ senkrecht auf a steht, sodass der Abstand (P—p) in a selbst gemessen wird.

Ist D_∞ der unendlich ferne Punkt von d′, und sind p_1 und p'_1 die durch P'_1 bezw. P_1 gehenden Polaren von P_1 bezw. P'_1, so sind p, p', p_1, p'_1 die von D_∞ an K_e^{IV} kommenden Tangenten. Sie bilden die Paare pp' und $p_1 p_1'$ von $J(D_\infty)$, wie auch aus Satz (8) ohne weiteres folgt. Dies gibt den Satz:

(9). *Der geometrische Ort derjenigen Punkte* P, *deren Tangenten an* K_e^{IV} *zwei Paare der Involution* J(P) *bilden, ist die unendlich ferne Gerade* g_∞ *von* γ.

Schliesslich liefert die Tatsache, dass p und p′ wie auch p_1 und p'_1 von einander den ebenen Abstand e haben, eine Construction von K_e^{IV} mit Hilfe der von den unendlich fernen Punkten an K_e^{IV} kommenden Tangenten: die von einem Punkte D_∞ an K_e^{IV} gehenden Tangenten sind die e-Strahlen der Involution $J(D_\infty)$. — K_e^{IV} kann indessen auch dadurch construiert werden, dass die Schnittpunkte $P P' P_1 P'_1$ eines Durchmessers d mit C_e^4 mit dem Pole D_∞ von d verbunden werden.

Die e-Polaren sind im Allgemeinen nicht Tangenten der C_e^4. Doch ist leicht einzusehen, dass die aus den unendlich fernen Punkten der Axen a und b an K_e^{IV} gehenden Tangenten die C_e^4 in den e-Punkten von J(a) bezw. J(b) berühren. Im Büschel der C_e^4-Kurven gibt es eine, aber auch

nur eine Kurve, die C_0^4-Kurve, deren Tangentenkurve identisch mit der K_e^{IV}-Kurve gleichen Parameters, der K_0^{IV}-Kurve, ist. —

Um eine Vorstellung von der Gestaltung der C_e^4 bei den verschiedenen Arten der ebenen Polarsysteme und ihrer Basiskurven zu gewinnen, wollen wir uns nunmehr den einzelnen Kegelschnittsgattungen zuwenden. Dabei soll künftig der Einfachheit halber statt von der C_e^4 des Polarfeldes von der C_e^4 der Basiskurve desselben geredet werden.

§ 6. 1.) Die C_e^4 einer Ellipse.

Die Basiskurve eines Polarfeldes sei eine reelle Ellipse $\mathfrak{E}^2$. Jeder Durchmesser d schneidet $\mathfrak{E}^2$ in zwei reellen endlichen Punkten D und D_1, d. h. J(d) ist stets hyperbolisch. Demnach sind die beiden ē-Paare von J(d), d. h. die vier Schnittpunkte von d mit C_e^4, stets reell und endlich, da der Winkel φ zweier conjugierter Durchmesser der Bedingung $\frac{\varphi}{2} \geqq \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}$ unterworfen ist (wo a und b die Längen der Halbaxen der Ellipse bedeuten, und $a > b$ ist). Von den Punkten $PP'P_1P'_1$, in denen d die C_e^4 schneidet, liegen zwei, P und P_1 auf DD_1, also innerhalb $\mathfrak{E}^2$, die beiden andern, P′ und P'_1, auf $D \cdot D_1$, also ausserhalb $\mathfrak{E}^2$. Dreht sich nun d um M, so beschreiben P und P_1 ein innerhalb $\mathfrak{E}^2$ gelegenes Oval, während die Punkte P′ und P'_1 ein die Ellipse umschliessendes Oval bilden.

Lässt man e alle Werte von $e = 0$ bis $e = \infty$ annehmen, so ist es leicht, sich die Gesamtheit aller C_e^4-Kurven vorzustellen. Nähert sich e immer mehr dem Werte 0, so zieht sich das äussere Oval der C_e^4 immer mehr auf $\mathfrak{E}^2$ zusammen, während sich das innere Oval immer mehr nach $\mathfrak{E}^2$ hin erweitert. Für $e = 0$ fallen beide Ovale in $\mathfrak{E}^2$ zusammen, wodurch nunmehr deutlich wird, wie $\mathfrak{E}^2$ als C_0^4-Kurve zur Doppelkurve des C_e^4-Kurven-Büschels wird. — Für immer mehr wachsende Werte von e zieht sich das innere Oval immer mehr auf M zusammen. Für $e = \infty$ tritt an Stelle des inneren Ovals das Geradenpaar (i_1, i_2), das M zum Doppelpunkte hat. Das äussere Oval erweitert sich für wachsende

Werte von e immer mehr und geht für $e = \infty$ in g_∞ über. (Vgl. Satz (6a)). Ergebnis:

(*10*). *Die C_e^4 einer Ellipse besteht aus zwei getrennten Ovalen, deren eines innerhalb der Ellipse liegt, während das andere dieselbe umschliesst.*

Ist die Basiskurve ein Kreis $\mathfrak{K}^2$ mit dem Radius r, so besteht die C_e^4 aus zwei mit $\mathfrak{K}^2$ concentrischen Kreisen, deren Radien $r_1 = \sqrt{\frac{e^2}{4} + r^2} - \frac{e}{2}$ und $r_2 = \sqrt{\frac{e^2}{4} + r^2} + \frac{e}{2}$ sind. (Vgl. S. 24). Die K_e^{IV} ist beim Kreise für jeden Wert von e die Tangentenkurve der C_e^4, aber jeder Punkte eines der beiden Kreise der C_e^4 ist nicht seiner Tangente polar, sondern einer der beiden zu dieser parallelen Tangenten an den andern Kreis.

Die Zweizügigkeit der C_e^4 bei der Ellipse verträgt sich mit dem Harnackschen Satze [1]) über die Vielteiligkeit einer algebraischen ebenen Kurve. Dieser Satz sagt aus, dass eine ebene Kurve vom Geschlecht p höchstens p + 1 Züge haben kann. Die C_e^4 hat vermöge ihrer beiden Doppelpunkte das Geschlecht p = 1 und kann also zwei Züge haben. Da die C_e^4 jedes Polarfeldes vom Geschlecht 1 ist, so werden wir auch weiterhin höchstens zweizügige C_e^4-Kurven zu erwarten haben.

2.) Die C_e^4 einer Hyperbel.

Auf jedem die gegebene Hyperbel $\mathfrak{H}^2$ reell schneidenden Durchmesser d sind seine Schnittpunkte mit C_e^4 reell: Sie sind zu construieren als die ē-Punkte der hyperbolischen Involution J(d). In diesem Falle liegen P′ und P'_1 innerhalb der Hyperbel, P und P_1 liegen ausserhalb derselben in dem durch $\mathfrak{H}^2$ und deren Asymptoten s und t begrenzten Teile der Ebene. S_∞ und T_∞ sind reelle Doppelpunkte der C_e^4.

Jede der beiden Asymptoten s und t schneidet C_e^4 ausser im Doppelpunkte S_∞ bezw. T_∞ noch in zwei endlichen Punkten, die wir S′ und S'_1 bezw. T′ und T'_1 nennen wollen.

---

[1]) Harnack, Mathem. Annalen, Bd. 10. S. 189 u. ff.

S' und S'_1 sind die Pole der beiden zu s im ebenen Abstande e parallelen Geraden s' bezw. s'_1 und bilden je mit S_∞ zusammen ein ∞-Paar der parabolischen Involution J(s). In der Tat ist für $s : \bar{e} = \infty$.

Bewegt sich ein $\mathfrak{H}^2$ reell schneidender Durchmesser d von s nach t, so beschreiben P' und P'_1 innerhalb jedes der beiden Hyperbelzweige Kurvenstücke von S_∞ nach T_∞ hin, durch die e-Punkte E' und E'_1 der a-Axe hindurch. P und P_1 beschreiben innerhalb des ihnen zugewiesenen Gebietes Kurventeile, die sich von S' bezw. S'_1 nach T' bezw. T'_1 durch die e-Punkte E bezw. E_1 in J(a) hindurch erstrecken.

Ist nun d ein imaginär schneidender Durchmesser von $\mathfrak{H}^2$, so ist J(d) elliptisch. Ihre Potenzpunkte sind[1]) die Schnittpunkte D und D_1 von d mit der $\mathfrak{H}^2$ conjugierten Hyperbel $\mathfrak{H}'^2$. Die $\bar{e}$-Paare von J(d) sind (vgl. S. 25) nur dann reell, wenn $\bar{e} \geqq D D_1$ ist. — Wir wollen nun wie bei den Axen unter dem Buchstaben d nicht nur einen Durchmesser als Gerade verstehen, sondern zugleich auch den Abstand jedes seiner Schnittpunkte D und D_1 mit $\mathfrak{H}^2$ bezw. $\mathfrak{H}'^2$ von M. Dann können wir folgenden Hilfssatz beweisen:

„Sind d_1 und d_2 zwei reell schneidende Durchmesser von H'^2, wo $d_1 > d_2$ ist, und schneidet der Durchmesser d_2 die C_e^4 reell, so sind auch die Schnittpunkte von d_1 mit C_e^4 reell."

Beweis: Die den Durchmessern d_1 und d_2 conjugierten Durchmesser seien d'_1 bezw. d'_2. Ferner sei $\sphericalangle (d_1, d'_1) = \varphi_1$, $\sphericalangle (d_2, d'_2) = \varphi_2$. Nun gilt für conjugierte Durchmesser einer Hyperbel die Gleichung: $d_1^2 - d'^2_1 = d_2^2 - d'^2_2$[2]). Da $d_1 > d_2$ vorausgesetzt ist, so folgt: $d'_1 > d'_2$. Nun gilt weiter[3]): $d_1 . d'_1 . \sin\varphi_1 = d_2 . d'_2 . \sin\varphi_2$, also muss wegen $d'_1 > d'_2$: $1) \ldots 2\, d_1 \sin\varphi_1 < 2\, d_2 . \sin\varphi_2$ sein.

Da aber nach Voraussetzung d_2 die C_e^4 reell schneidet, so ist: $2d_2 < \bar{e}_2 = \frac{e}{\sin\varphi_2}$ oder: $2d_2 . \sin\varphi_2 < e$, und, vermöge

[1]) Steiner-Schröter-Sturm, Kegelschnitte S. 161.
[2]) Ebenda, S. 173.
[3]) Ebenda, S. 166.

der obigen Ungleichung 1) a fortiori: $2d_1 . \sin \varphi_1 < e$. Dies bedeutet aber, in der Form

$$2\,d_1 < \frac{e}{\sin \varphi_1} = \bar{e}_1$$

geschrieben, dass d_1 die C_e^4 reell schneidet, w. z. b. w.

Schneidet also die b-Axe der $\mathfrak{H}^2$ die C_e^4 reell, so schneidet auch jeder andere die $\mathfrak{H}'^2$ reell schneidende Durchmesser C_e^4 reell. Die Schnittpunkte der b-Axe mit C_e^4 sind die e-Punkte von J(b), deren Potenzpunkte die Entfernung 2b haben. Nun sind die e-Punkte von J(b) reell, nur solange $e \geqq 2b$ ist (s. S. 25). Wir wollen also zunächst annehmen, dass $e > 2b$ sei.

I. $e > 2b$.

Dann liefert jeder reell schneidende Durchmesser d′von $\mathfrak{H}'^2$ vier reelle Schnittpunkte P, P′, P_1, P'_1 mit C_e^4, von denen P′ und P'_1 innerhalb $\mathfrak{H}'^2$ liegen, während P und P_1 sich innerhalb des von s, t und $\mathfrak{H}'^2$ begrenzten Teiles von γ befinden. Bewegt sich d′ von s nach t, so beschreiben P′ und P'_1 je einen Kurvenzweig $\mathfrak{Z}_4$ und $\mathfrak{Z}_2$, (vgl. Fig. 1; die Bezeichnungen werden sich später rechtfertigen) die innerhalb der Aeste der $\mathfrak{H}'^2$ liegen und sich von S_∞ durch die äusseren e-Punkte E′ und E'_1 von J(b) hindurch nach T_∞ erstrecken, während P und P_1 Kurventeile beschreiben, die sich von S_1' bezw. S′ durch die inneren e-Punkte von J(b) hindurch, E und E_1, nach T′ bezw. T_1' erstrecken.

Wir erhalten also ein durch die Punkte P und P_1 der Durchmesser d und d′ beschriebenes inneres Oval O_i, das M umschliesst und durch S′, T'_1, S'_1, T′ hindurchgeht.

Nennen wir die von P′ und P'_1 innerhalb $\mathfrak{H}^2$ beschriebenen Kurventeile $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_3$, so müssen die 4 von P′ und P'_1 beschriebenen Kurvenzweige $\mathfrak{Z}_1\mathfrak{Z}_3$, $\mathfrak{Z}_2\mathfrak{Z}_4$ durch S_∞ und T_∞ hindurch zusammenhängen, da die C_e^4 nur zwei Ovale haben kann. (Vgl. S. 39). Um den Zusammenhang zwischen den 4 Kurventeilen $\mathfrak{Z}_i$ zu finden, lassen wir einen beliebigen Durchmesser d sich in positivem Sinne um M drehen (vgl. Fig. 1) und betrachten das eine auf ihm liegende Schnittpunktepaar PP′ mit C_e^4. P liegt auf O_i und beschreibt O_i,

wenn d sich um 360° dreht. Folglich muss auch P′ die Kurventeile $\mathfrak{Z}_1$ continuierlich durchlaufen, wodurch ihr Zusammenhängen von Neuem als notwendig erscheint.

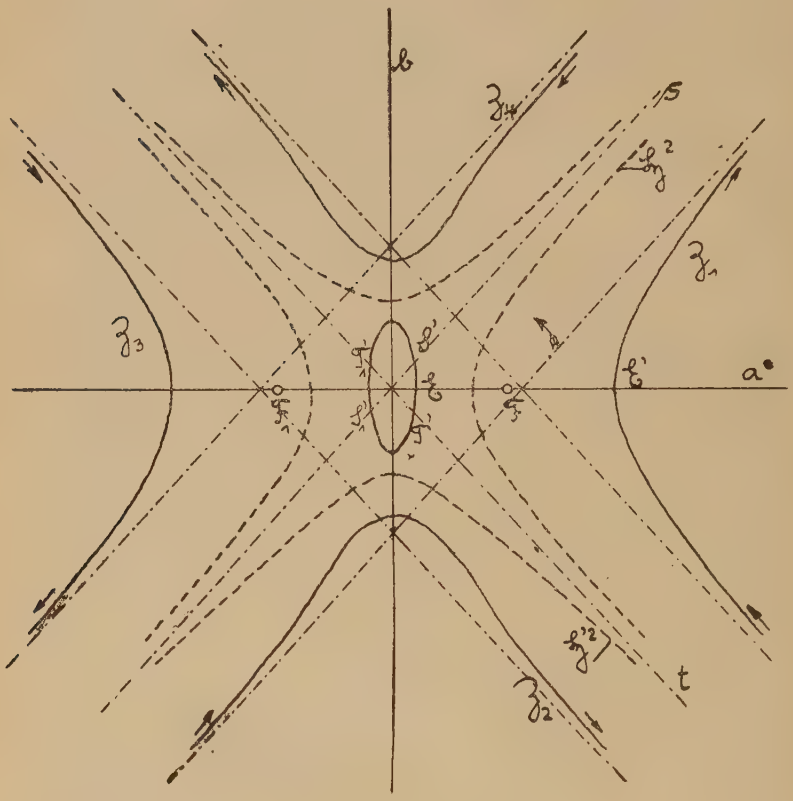

Fig. 1[1]). —: C_e^4, — —: $\mathfrak{H}^2$ und $\mathfrak{H}'^2$, — · — ·: Asymptoten.

P falle zunächst mit dem rechten inneren e-Punkte E von J(a) zusammen. Dann ist $P' \equiv E'$ und liegt auf $\mathfrak{Z}_1$.

[2]) Diese Figur ist (wie auch die folgenden) nicht genau gezeichnet. Sie soll nur die Lage- und Zusammenhangsverhältnisse verdeutlichen.

Dreht sich nun d im angegebenen Sinne bis s, so läuft P bis S′, und P′ bewegt sich in der in Fig. 1 angegebenen Pfeilrichtung auf $\mathfrak{Z}_1$ nach S_∞ hin. Ist d durch s hindurchgegangen und nun ein imaginär schneidender Durchmesser von $\mathfrak{H}^2$, so geht P bis T'_1, P′ aber liegt, da J(d) elliptisch ist, mit P auf verschiedenen Seiten von M und befindet sich also auf $\mathfrak{Z}_2$, diesen Zweig von S_∞ bis T_∞ durchlaufend. Verfolgt man in derselben Weise die Bewegung von d weiter, so ergibt sich in der Tat, dass die 4 Kurvenzweige $\mathfrak{Z}_1 \ldots \mathfrak{Z}_4$ in der in der Figur angegebenen Weise zusammenhängen und ein geschlossenes Oval O_{2d} bilden, das sich in S_∞ und T_∞ selbst durchschneidet. Ergebnis:

(*11a*). *Die* C_e^4 *einer Hyperbel, deren Nebenaxe* $= 2bi$ *ist, besteht für Werte von* $e > 2b$ *aus zwei getrennten Ovalen. Von diesen liegt eines,* O_i, *ganz im Endlichen und umschliesst* M, *das andere,* O_{2d}, *besteht aus 4 Zweigen, welche innerhalb der Zweige der gegebenen Hyperbel und der zu ihr conjugierten liegen und durch* S_∞ *und* T_∞ *hindurch miteinander zusammenhängen.* O_{2d} *durchschneidet sich selbst zweimal, in* S_∞ *und* T_∞, *den Doppelpunkten der* C_e^4.

Wächst $e > 2b$ immer mehr, so zieht sich O_i immer mehr auf M zusammen, während sich $\mathfrak{Z}_1 \ldots \mathfrak{Z}_4$ immer mehr verflachen, um für $e = \infty$ in g_∞ überzugehen. O_i reduziert sich dann auf den Mittelpunkt M, welcher Schnittpunkt des Geradenpaars (i_1, i_2) ist. (Vgl. Satz (6a) S. 31).

Lassen wir umgekehrt e sich immer mehr dem Werte $e = 2b$ nähern, so rücken $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_3$ sowie $\mathfrak{Z}_2$ und $\mathfrak{Z}_4$ immer näher an die beiden Aeste von $\mathfrak{H}^2$ bezw. $\mathfrak{H}'^2$ heran, O_i erweitert sich immer mehr und nähert sich bei den Potenzpunkten B und B′ von J(b) den Aesten $\mathfrak{Z}_4$ bezw. $\mathfrak{Z}_2$.

II. $e = 2b$.

Wird schliesslich $e = 2b$ angenommen, so erhält man auf der b-Axe je zwei mit B und B′ zusammengefallene Schnittpunkte von b mit C_e^4 (s. S. 25). In B und B′ schneidet O_i die Zweige $\mathfrak{Z}_4$ bezw. $\mathfrak{Z}_2$, sodass diese Punkte Doppelpunkte der C_{2b}^4 sind, und diese also in zwei zu einander

und zu $\mathfrak{H}^2$ homothetische Hyperbeln zerfällt. Der Beweis hierfür möge analytisch geführt werden, (Criterium (A) versagt in diesem Falle):

Die allgemeine Gleichung der C_e^4 einer Hyperbel ($\mathfrak{a} = a^2$, $\mathfrak{b} = -b^2$), bezogen auf die Axen der letzteren als Coordinatenaxen:

$(b^2x^2 - a^2y^2)^2 - b^4x^2(2a^2 + e^2) + a^4y^2(2b^2 - e^2) + a^4b^4 = 0$

geht für $e = 2b$ über in die Form:

$(x^2b^2 - a^2y^2)^2 - 2b^4x^2(a^2 + 2b^2) - 2a^4b^2y^2 + a^4b^4 = 0$,

welche sich in die beiden quadratischen Faktoren:

$$(x + \sqrt{a^2 + b^2})^2b^2 - a^2y^2 - b^4 = 0 \quad \text{und}$$
$$(x - \sqrt{a^2 + b^2})^2b^2 - a^2y^2 - b^4 = 0$$

zerlegen lässt. Jede dieser beiden Gleichungen stellt eine durch S_∞, T_∞, B und B′ gehende Hyperbel dar, deren Hauptaxe die Hauptaxe von $\mathfrak{H}^2$ ist. Die erste dieser beiden Hyperbeln hat den Brennpunkt F_1, die zweite den Brennpunkt F von $\mathfrak{H}^2$ zum Mittelpunkte. Ergebnis:

(11*b*). *Die* C_e^4 *einer Hyperbel, deren Nebenaxe* $= 2bi$ *ist, zerfällt für den Wert* $e = 2b$ *in zwei congruente, zu einander und zur gegebenen Hyperbel homothetische Hyperbeln, welche die Brennpunkte der gegebenen Hyperbel zu Mittelpunkten haben und einander ausser in* S_∞ *und* T_∞ *in den Potenzpunkten der auf der Nebenaxe liegenden Involution* J(b) *durchschneiden.*

III. $e < 2b$.

Es sei nun $e < 2b$. Dann schneidet die b-Axe die C_e^4 imaginär, und dasselbe gilt für alle Durchmesser innerhalb eines gewissen von b halbierten Winkels, dessen Schenkel, die Durchmesser d_1 und d_2, Doppeltangenten der C_e^4 sind. d_1 und d_2 haben mit C_e^4 nur die Potenzpunkte von $J(d_1)$ bezw. $J(d_2)$ gemein und berühren die C_e^4 in diesen Punkten, da diese doppelt als $\bar{e}_1$- bezw. $\bar{e}_2$-Punkte von $J(d_1)$ bezw. $J(d_2)$ aufzufassen sind. Ist d'_1 der dem Durchmesser d_1 conjugierte Durchmesser, und ist $\sphericalangle(d_1, d'_1) = \varphi_1$, so lässt sich d_1 bestimmen mittels der Gleichungen: $2d_1 = \dfrac{e}{\sin \varphi_1}$,

$$d_1 . d'_1 . \sin \varphi_1 = a . b .$$

Nach dem auf Seite 40 bewiesenen Hilfssatze schneiden alle reellen Durchmesser von $\mathfrak{H}'^2$ innerhalb der spitzen Winkelräume (s, d_1) und (t, d_2) (vgl. Fig. 2) die C_e^4 reell. Die Schnitt-

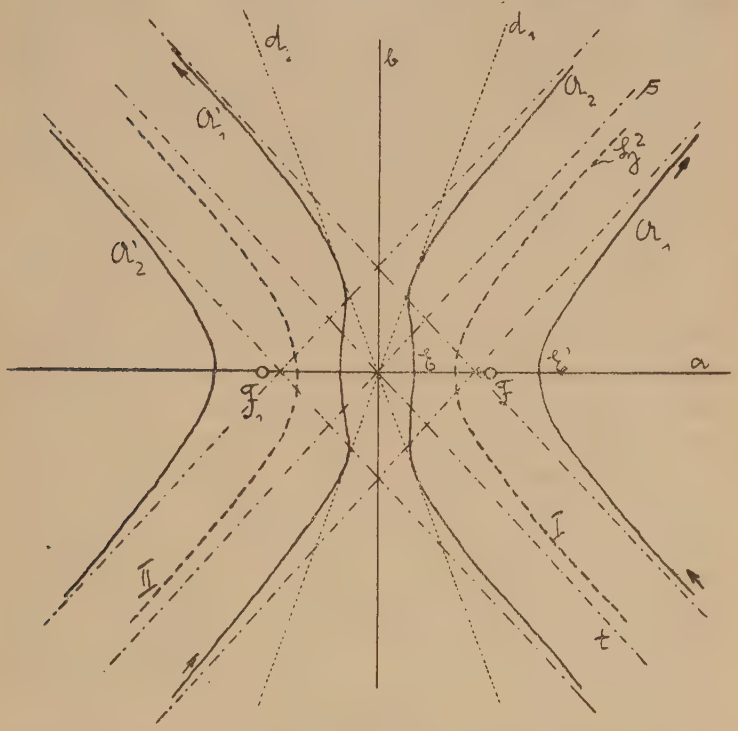

Fig. 2.

punkte dieser Durchmesser mit C_e^4 liefern zwei Kurvenäste $\mathfrak{A}'_1$ und $\mathfrak{A}_2$, die durch Verschmelzung der oben erwähnten Zweige $\mathfrak{Z}_4$ und $\mathfrak{Z}_2$ mit dem inneren Ovale O_i entstanden sind.

Nennt man die beiden Kurventeile von C_e^4 innerhalb der beiden Zweige von $\mathfrak{H}^2$ $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}'_2$ (vgl. Fig. 2), so kann man die Zusammenhangsverhältnisse der 4 Kurventeile $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}'_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}'_2$ wieder dadurch feststellen, dass man die Bewegung eines Punktepaares P P′ von C_e^4 auf einem Durchmesser bei dessen Drehung um M verfolgt. Man hat dann nur nötig, den Durchmesser d etwa von der a-Axe aus in positivem Sinne bis d_1, von da aus in negativem Sinne bis d_2

und dann wieder in positivem Sinne bis a sich bewegen zu lassen und zu bedenken, dass P und P′ auf derselben oder auf verschiedenen Seiten von M liegen, je nachdem J(d) hyperbolisch oder elliptisch ist. Es ergibt sich, dass $\mathfrak{A}_1$ mit $\mathfrak{A}'_1$ und ebenso $\mathfrak{A}_2$ mit $\mathfrak{A}'_2$ durch S_∞ und T_∞ hindurch zusammenhängen, und dass also die beiden durch $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}'_1$ bezw. $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{A}'_2$ gebildeten Ovale einander in S_∞ und T_∞ durchschneiden, wodurch diese Punkte zu Doppelpunkten der C^4_e werden. Die Zusammenhangsverhältnisse sind also in diesem Falle so wie bei der C^4_{2b}. Wir haben den Satz:

(11*c*). *Die* C^4_e *einer Hyperbel* $\mathfrak{H}^2$, *deren Nebenaxe* $= 2bi$ *ist, besteht für* $e < 2b$ *aus zwei Ovalen, welche einander in* S_∞ *und* T_∞, *den Doppelpunkten der* C^4_e *durchschneiden. Jedes der beiden Ovale besteht aus zwei Aesten, deren einer den einen Ast der* $\mathfrak{H}^2$ *umschliesst, während der andere innerhalb des andern Astes der* $\mathfrak{H}^2$ *liegt.*

Wird e immer kleiner, so nähern sich $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ immer mehr dem zwischen ihnen verlaufenden Aste I der $\mathfrak{H}^2$, $\mathfrak{A}'_1$ und $\mathfrak{A}'_2$ schmiegen sich immer enger dem andern Aste II der $\mathfrak{H}^2$ an. Die Punkte S′ und S'_1 auf s, sowie die Punkte T′ und T'_1 auf t rücken immer weiter ins Unendliche hinaus. Für $e = 0$ fallen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ mit I, $\mathfrak{A}'_2$ und $\mathfrak{A}'_1$ mit II zusammen, wodurch von neuem deutlich wird, dass die Hyperbel als C^4_0-Kurve doppelt zu zählen ist.

3.) Die C^4_e eines Polarfeldes mit reell-imaginärer Basiskurve.

Es liege ein Polarfeld vor, dessen Basiskurve eine reell-imaginäre Ellipse $\mathfrak{E}^2_i$ ist. Die zu ihr conjugierte Ellipse werde mit $\mathfrak{E}'^2$ bezeichnet; sie enthält die Potenzpunkte der auf jedem Durchmesser d gelegenen elliptischen Involution J(d). Die Haupt- bezw. Nebenaxe von $\mathfrak{E}'^2$ mögen die Länge 2a bezw. 2b haben; sie sind die Neben- bezw. Hauptaxe des gegebenen Polarfeldes.

Die C^4_e eines solchen Polarfeldes ist, wie schon auf S. 31 erwähnt wurde, für $e = 0$ imaginär und bleibt auch zunächst

noch imaginär, wenn e von 0 an wächst. Der Wert von e, für den zum ersten Male reelle e-Pole vorhanden sind, ergibt sich aus dem Apollonischen Satze vom constanten Inhalt eines der reellen Ellipse umschriebenen Parallelogramms, dessen Seiten zu conjugierten Durchmessern parallel sind. Dieser constante Inhalt ist das Produkt aus dem einen Durchmesser in die Entfernung der beiden parallelen Tangenten in seinen Endpunkten und letztere am kleinsten, wenn jener am grössten ist. Wir erhalten daher folgenden Satz:

„Diejenigen Punkte eines Polarfeldes mit reell-imaginärer Basiskurve, welche von ihren Polaren den kleinsten Abstand haben, sind die Potenzpunkte der auf der Hauptaxe liegenden Involution conjugierter Punkte oder die Endpunkte der Nebenaxe der conjugierten Ellipse."

Für alle Werte $e < 2b$ ist demnach C_e^4 imaginär, der Bedingung $e = 2b$ genügen reell nur zwei Punkte, eben die beiden Nebenscheitel B und B′ von $\mathfrak{E}'^2$. Und dual sind die beiden Nebenscheiteltangenten von $\mathfrak{E}'^2$ die einzigen reellen Geraden des Polabstandes $e = 2b$ und zugleich die Geraden geringsten Polabstandes überhaupt im gegebenen Polarfelde.

Die C_{2b}^4 ist mit Ausnahme der beiden reellen Punkte B und B′ imaginär. Ihre Gleichung, hergeleitet aus der allgemeinen Gleichung der C_e^4-Kurve eines beliebigen Polarfeldes dadurch, dass $\mathfrak{a} = -a^2$, $\mathfrak{b} = -b^2$, $e = 2b$ gesetzt wird:

$$(b^2x^2 + a^2y^2 + a^2b^2)^2 - 4b^2(b^4x^2 + a^4y^2) = 0$$

lässt sich in zwei quadratische Faktoren zerlegen:

$$[b^2(x+i.\sqrt{a^2-b^2})^2+a^2y^2-b^4].[b^2(x-i.\sqrt{a^2-b^2})^2+a^2y^2-b^4]=0.$$

Somit zerfällt die C_{2b}^4 in zwei conjugiert imaginäre Kegelschnitte, denen die Punkte B und B′ gemeinsam sind und welche die imaginären Brennpunkte[1]) des gegebenen Polarfeldes zu Mittelpunkten haben. B und B′ sind also reelle Doppelpunkte der C_{2b}^4-Kurve, welche ausserdem noch S_∞ und T_∞ zu imaginären Doppelpunkten hat.

Erteilen wir nun e einen Wert, der der Ungleichung: $2a > e > 2b$ genügt, so erhalten wir auf der b-Axe von $\mathfrak{E}^2$

[1]) R. Sturm, a. a. O. Bd. II S. 91.

die vier e-Punkte von J(b) als Punkte der C_e^4, und ebenso schneiden alle Durchmesser d, deren Länge 2d, durch $\mathfrak{E}'^2$ bestimmt, der Bedingung $2d \leqq \bar{e}$ genügt, die C_e^4 sicher reell. Den Uebergang von den C_e^4 reell schneidenden Durchmessern zu den imaginär schneidenden bilden zwei zu einander bezüglich b (und a) symmetrische Durchmesser d_1 und d_2 (wo $2d_1 = 2d_2 > e$), welche Doppeltangenten der C_e^4 sind. d_1 kann bestimmt werden durch die Gleichungen:

$$1) \ldots 2d_1 = \frac{e}{\sin \varphi_1}$$

$$2) \ldots d_1 . d'_1 . \sin \varphi_1 = ab,$$

wo d'_1 der d_1 conjugierte Durchmesser, $\varphi_1 = \sphericalangle (d_1, d'_1)$ ist. Es folgt nämlich aus 1) und 2) durch Division $d'_1 = \frac{2ab}{e}$, und d'_1 liegt also, wegen der Voraussetzung $2a > e > 2b$ zwischen a nnd b und ist als Halbmesser vorhanden, daher auch der conjugierte Halbmesser d_1.

Man erkennt, dass die C_e^4 aus zwei getrennten, die a-Axe nicht schneidenden Ovalen besteht, welche bezw. die Punkte B und B′ umschliessen. d_1 und d_2 sind die inneren gemeinsamen Tangenten der beiden Ovale. Lässt man e sich immer mehr dem Werte 2a nähern, so nähern sich die beiden Ovale einander immer mehr bei den Hauptscheiteln A und A′ von $\mathfrak{E}'^2$. (Vgl. Fig. 3).

Für $e = 2a$ werden die Schnittpunkte von a mit C_e^4 zum ersten Male reell und zwar sind diese Schnittpunkte die Potenzpunkte A A′ von J(a), welche beide doppelt zu zählen sind. (Vgl. S. 25). Die beiden Ovale gehen durch A und A′ hindurch in einander über, und A und A′ werden zu Doppelpunkten der C_c^4. Als Beweis hierfür kann die Tatsache dienen, dass sich die Gleichung der C_{2a}^4:

$$(b^2x^2 + a^2y^2 + a^2b^2)^2 - 4a^2(b^4x^2 + a^4y^2) = 0$$

in die beiden quadratischen Faktoren:

$$b^2x^2 + a^2(y + \sqrt{a^2 - b^2})^2 - a^4 = 0$$

$$b^2x^2 + a^2(y - \sqrt{a^2 - b^2})^2 - a^4 = 0$$

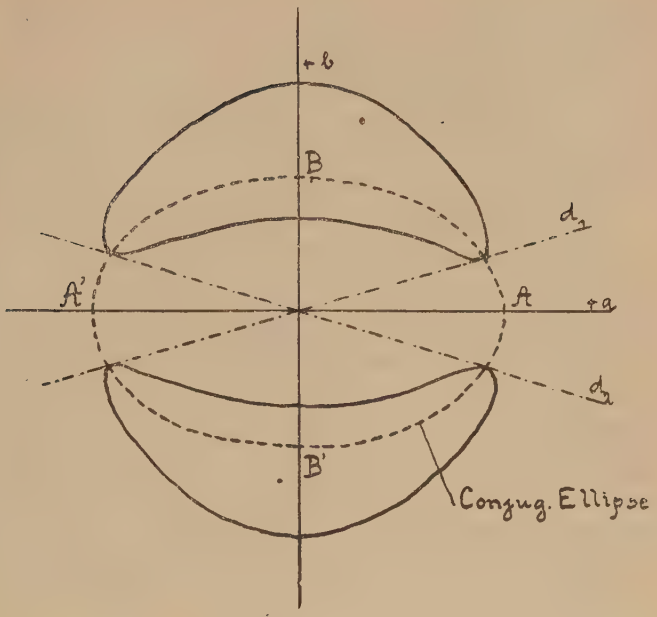

Fig. 3.

zerlegen lässt, deren jeder eine Ellipse darstellt, deren Nebenaxe mit der b-Axe von $\mathfrak{E}'^2$ zusammenfällt, während die andere Axe der a-Axe der $\mathfrak{E}'^2$ parallel läuft. Die Mittelpunkte beider Ellipsen sind die reellen Brennpunkte des gegebenen Polarfeldes[1]). Die beiden Ellipsen sind congruent und zu $\mathfrak{E}'^2$ ähnlich und ähnlich gelegen. Sie schneiden einander in A und A', welche Punkte somit reelle Doppelpunkte der C^4_{2a} sind.

Wird schliesslich $e > 2a$ angenommen, so erhält man als C^4_e zwei Ovale, deren eines innerhalb $\mathfrak{E}'^2$ liegt, während das andere $\mathfrak{E}'^2$ umschliesst, also ähnlich wie bei der C^4_e einer reellen Ellipse. Ergebnis:

(12). *Die* C^4_e *eines Polarfeldes mit einer reell-imaginären Basiskurve, deren conjugierte Ellipse* $\mathfrak{E}'^2$ *die Axen* 2a *und* 2b *hat* ($a > b$), *ist imaginär für alle Werte* $e < 2b$. *Sie zerfällt für* $e = 2b$ *in zwei conjugiert imaginäre Kegelschnitte, welche* S_∞

[1]) R. Sturm, a. a. O. Bd. II, S. 91.

und T_∞ *zu imaginären und die Nebenscheitel von* $\mathfrak{E}'^2$ *zu reellen Schnittpunkten haben.*

Für alle andern Werte von e *besteht die* C_e^4 *aus zwei Ovalen. Diese liegen, wenn* $e < 2a$ *ist, ausserhalb von einander und umschliessen bezw. die Nebenscheitel von* $\mathfrak{E}'^2$. *Wenn* $e > 2a$ *ist, liegt das eine Oval in* $\mathfrak{E}'^2$, *das andere umschliesst* $\mathfrak{E}'^2$.

Im Uebergangsfalle $e = 2a$ *zerfällt die* C_e^4 *in zwei congruente und zu* $\mathfrak{E}'^2$ *homothetische Ellipsen, welche die reellen Brennpunkte des Polarfeldes bezw. zu Mittelpunkten haben und sich, ausser in* S_∞ *und* T_∞, *den Doppelpunkten jeder* C_e^4 *des Polarfeldes, in den Hauptscheiteln von* $\mathfrak{E}'^2$ *durchschneiden.*

Es ist leicht einzusehen, dass bei Polarfeldern, deren Basiskurve ein reell imaginärer Kreis des Radius ri ist, die C_e^4 imaginär ist für alle Werte von e, welcher kleiner als 2r sind. Für $e = 2r$ besteht die C_e^4 aus dem doppelt gerechneten conjugierten Kreise $\mathfrak{K}'^2$, dessen Tangenten, ebenfalls doppelt gerechnet, die K_e^{IV} für diesen Wert von e bilden. Ist $e > 2r$, so besteht die C_e^4 aus zwei concentrischen Kreisen um den Mittelpunkt des Polarfeldes als Centrum. Der eine der beiden Kreise liegt innerhalb $\mathfrak{K}'^2$ und hat den Radius $\sqrt{\frac{e^2}{4} - r^2} - \frac{e}{2}$, der andere umschliesst den $\mathfrak{K}'^2$ und hat den Radius $\sqrt{\frac{e^2}{4} - r^2} + \frac{e}{2}$. — Die K_e^{IV} wird gebildet durch die Tangenten dieser beiden Kreise. (Die Tangenten des einen Kreises sind polar zu den Punkten des andern.).

4.). Die C_e^4 einer Parabel.

Die gegebene Parabel werde mit $\mathfrak{P}^2$ bezeichnet, ihr Mittelpunkt sei M_∞. Auf jedem Durchmesser d von $\mathfrak{P}^2$ ist J(d) hyperbolisch-gleichseitig. Ist P ein Punkt der C_e^4 auf d, etwa innerhalb $\mathfrak{P}^2$, so folgt durch ähnliche Ueberlegungen, wie sie auf S. 36 angestellt worden sind, dass der P in J(d) gepaarte äussere Punkt P′ ebenfalls auf C_e^4 liegt. Schneidet also d $\mathfrak{P}^2$ in D, so sind je 2 endliche Schnittpunkte von d mit C_e^4 von D gleichweit entfernt. Da nach Satz (4a) M_∞

Doppelpunkt der C_e^4 ist, so sind die beiden andern Schnittpunkte von d mit C_e^4 in M_∞ vereinigt. Ist nun φ wieder der Winkel unter dem d gegen die ihm conjugierten Sehnen geneigt ist, so ist, wie im allgemeinen Falle (S. 36): $PP' = \frac{e}{\sin \varphi} = \bar{e}$, d. h. auch hier sind die Schnittpunkte eines Durchmessers d mit C_e^4 als die $\bar{e}$-Paare von J(d) zu construieren; zwei dieser Schnittpunkte fallen, da J(d) stets gleichseitig-hyperbolisch ist, in M_∞ hinein. (Vgl. S. 26).

Die Punkte P beschreiben, wenn d sich um M_∞ dreht, ein innerhalb $\mathfrak{P}^2$ gelegenes Oval O_i; ebenso bilden die Punkte P' ein Oval O_a, das aber $\mathfrak{P}^2$ umschliesst. Beiden Ovalen gehört M_∞ an, also schneiden sie einander reell und müssen daher noch mindestens einen reellen Schnittpunkt haben. Dieser muss aber ein Punkt von g_∞ sein, da O_a und O_i vermöge ihrer Beschränkung auf den Raum ausserhalb bezw. innerhalb der Parabel keinen reellen endlichen Punkt gemein haben können. Jeder reelle oder imaginäre Punkt von g_∞ ausser M_∞ ist nun von seiner Polare unendlich weit entfernt, also ist M_∞ als vierfacher Schnittpunkt von g_∞ mit C_e^4 anzusehen. Demnach schneiden O_a und O_i einander auch zum zweiten Male in M_∞, berühren einander also in diesem Punkte. g_∞ ist die gemeinsame Tangente der beiden Ovale in M_∞. In der Tat ist ein Doppelpunkt, der auf allen durch ihn gehenden Geraden mit Ausnahme einer einzigen als doppelter Schnittpunkt, auf dieser einzigen aber als vierfacher Schnittpunkt zählt, stets ein Berührungsknoten[1]). Er zählt für 2 Doppelpunkte, sodass auch die C_e^4 einer Parabel vom Geschlechte $p = 1$ ist.

Dass M_∞ als doppelt zu zählender Doppelpunkt der C_e^4 aufzufassen ist, kann man sich auch auf folgende Weise klarmachen: die beiden ∞ fernen Punkte S_∞ und T_∞ einer Hyperbel sind Doppelpunkte für jede ihrer C_e^4-Kurven. Rücken

---

[1]) Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven. S. 279.

nun S_∞ und T_∞ unendlich nahe zusammen, so wird die Hyperbel zur Parabel, ohne dass S_∞ und T_∞ aufhören, Doppelpunkte der jeweiligen C_e^4-Kurven zu sein. Wie die Parabel den Uebergang bildet von den Kegelschnitten mit zwei reellen zu denen mit zwei imaginären unendlich fernen Punkten, so bildet ganz entsprechend die C_e^4 einer Parabel durch ihre beiden reellen unendlich nahen Doppelpunkte den Uebergang von den C_e^4-Kurven mit zwei reellen zu denen mit zwei imaginären Doppelpunkten. Dieser Uebergang äussert sich eben in der Selbstberührung. — Es hat sich Folgendes ergeben:

(*13*). *Die* C_e^4 *einer Parabel ist eine Kurve vierter Ordnung mit einer Sesbstberührung. Sie besteht aus zwei Ovalen, deren eines innerhalb der Parabel liegt, während das andere dieselbe umschliesst. Beide Ovale berühren einander und* g_∞ *im Mittelpunkte der Parabel.*

Wächst e immer mehr, so verflachen sich O_a und O_i mehr und mehr und gehen für $e = \infty$ in die doppelt zu rechnende g_∞ über, welche durch die beiden imaginären Geraden i_1 und i_2 (Satz (6a) S. 31) zur vierten Ordnung ergänzt wird. Für $e = 0$ gehen beide Ovale in $\mathfrak{P}^2$ über, diese zur Doppelkurve des C_e^4-Kurvenbüschels machend. Wie die allgemeine C_e^4 berührt auch $\mathfrak{P}^2 \equiv C_0^4$ g_∞.

Es sei noch erwähnt, dass, dual, g_∞ doppelt zu zählende Doppeltangente der K_e^{IV} ist; M_∞ ist ihr Berührungspunkt auf der mit K_e^{IV} verbundenen Punktkurve.

III. Kapitel.

Die e-Pole und e-Ebenen eines Polarraumes.

§ 1. Die für das Polarfeld gestellte Frage, deren Beantwortung zu der C_e^4 und der K_e^{IV} des Polarfeldes führte, führt im Raume zu der Aufgabe, den geometrischen Ort der

Punkte bezw. Ebenen eines Polarraumes[1]) zu suchen, die von ihren Polarebenen bezw. Polen den gegebenen Abstand e haben. (Abstandsdefinition II, S. 15).

Für die ∞^3 Punkte des Raumes ist es eine einfache Bedingung, von ihren Polarebenen den gegebenen Abstand e zu haben, also erfüllen die ∞^2 dieser Bedingung genügenden Punkte eine Fläche, die wir mit F_e bezeichnen wollen, die Fläche der „e-Pole" des Polarraumes. Entsprechend möge Φ_e die Klassenfläche der e-Ebenen genannt werden, d. h. der Ebenen, die von ihren Polen den gegebenen Abstand e haben. F_e und Φ_e sind polare Flächen des Polarraumes.

Wir setzen also jetzt einen beliebigen, aber nicht ausgearteten Polarraum voraus, von dem wir unbestimmt lassen, ob seine Basisfläche reell oder reell-imaginär ist. Die Ordnung der F_e-Fläche ist gleich der Anzahl der e-Pole, die auf einer beliebigen Geraden g liegen. Um diese Anzahl zu bestimmen, stellen wir auf g eine gewisse Punktverwandtschaft her. Das Symbol J(g) möge jetzt die durch den Polarraum auf g hervorgerufene Involution conjugierter Punkte bedeuten. Die Polarebenen der Punkte von g gehen durch die Polare g′ von g. Alle Ebenen, die von einem Punkte X von g den Abstand e haben, umhüllen als Tangentialebenen eine Kugel $\mathfrak{K}_e^2$ des Radius e und des Mittelpunktes X. An $\mathfrak{K}_e^2$ gehen von g′ zwei Tangentialebenen ξ_1 und ξ_2, welche g in den Punkten X'_1 bezw. X'_2 schneiden. Die diesen Punkten in J(g) gepaarten Punkte X_1 bezw. X_2, die Pole von ξ_1 bezw. ξ_2, ordnen wir dem X zu. Die dem Punkte X im andern Sinne zugeordneten Punkte erhalten wir folgendermassen: der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kugeln des Radius e, für welche die Polarebene ξ von X Tangentialebene ist, besteht aus den beiden zu ξ im Abstande e parallelen Ebenen. Sie schneiden in g die dem Punkte X im andern Sinne zugeordneten Punkte $\mathfrak{X}_1$ und $\mathfrak{X}_2$ ein. Somit ist auf g eine Verwandtschaft [2,2] festgelegt,

---

[1]) Zur Definition des Begriffes „Polarraum" vgl.: R. Sturm, a. a. O. Bd. III, § 81.

die wir mit $\mathfrak{B}(g)$ bezeichnen wollen. Ihre 4 Coincidenzelemente $C_1 .. C_4$ haben ersichtlich die Eigenschaft, von ihren Polarebenen γ_1 bezw. $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ den gegebenen Abstand e zu haben und liegen demnach auf der F_e. Diese ist also eine Fläche vierter Ordnung und wird dementsprechend künftig mit F_e^4 bezeichnet werden. Zugleich sind damit auch die durch g′ an die, nunmehr mit Φ_e^{IV} zu bezeichnende, Klassenfläche gehenden Tangentialebenen gefunden, es sind eben jene Polarebenen $\gamma_1 .. \gamma_4$ von bezw. $C_1 .. C_4$. Als Ergebnis können wir die folgenden beiden dualen Sätze aussprechen:

(*14a*). *Der geometrische Ort der Punkte des Polarraumes, die von ihren Polarebenen den Abstand* e *haben, ist eine Fläche vierter Ordnung,* F_e^4.

(14b). Der geometrische Ort der Ebenen des Polarraumes, die von ihren Polen den Abstand e *haben, ist eine Fläche vierter Klasse,* Φ_e^{IV}, *die zur* F_e^4*-Fläche im Polarraume polare Fläche.*

Analytisch gestaltet sich die Lösung des vorliegenden Problemes folgendermassen, wenn wir uns auf centrische Polarräume beschränken. Es liege die Gleichung einer centrischen Fläche zweiter Ordnung F^2, bezogen auf deren Hauptaxen als Cartesische Coordinatenaxen, zu Grunde:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1,$$

wo a, b, c die algebraischen Werte der Potenzen der auf den Hauptaxen a, b, c liegenden Involutionen J(a), J(b), J(c) bedeuten. In ganz ähnlicher Weise wie in der Ebene wird die Bedingung, dass die Entfernung eines Punktes $(x_1\ y_1\ z_1)$ von seiner Polarebene in Bezug auf F^2 die gegebene Grösse e habe, ausgedrückt durch die Gleichung:

$$e = \frac{x_1^2.b.c + y_1^2.c.a + z_1^2.a.b - abc}{\sqrt{x_1^2 b^2 c^2 + y_1^2 c^2 a^2 + z_1^2 a^2 b^2}},$$

aus welcher nach leichter Rechnung die in homogenen Coordinaten geschriebene Gleichung der F_e^4-Fläche der F^2 hervorgeht:

$$[x_1^2 bc + x_2^2 ca + x_3^2 ab - x_4^2 abc]^2 - e^2[x_4^2(x_1^2 b^2 c^2 + x_2^2 c^2 a^2 + x_3^2 a^2 b^2)] = 0.$$

§ 2. Der Doppelkegelschnitt der F_e^4.

Es bedeute $\mathfrak{K}_\infty^2$ den Kegelschnitt, in dem ε_∞ die (reelle oder reell-imaginäre) Basisfläche F^2 des Polarraumes schneidet. Jeder Punkt von $\mathfrak{K}_\infty^2$ liegt in seiner Polarebene und hat somit von dieser nach Satz (VI), S. 16 jeden beliebigen Abstand. Also folgt:

(*15a*). *Der unendlich ferne Kegelschnitt $\mathfrak{K}_\infty^2$ eines Polarraumes ist sämtlichen F_e^4-Flächen desselben gemeinsam.*

Und dual ergibt sich unmittelbar:

(*15b*). *Sämtliche Φ_e^{IV}-Flächen eines Polarraumes haben den Kegel der Asymptotenebenen desselben gemeinsam.*

Der Satz (15a) kann durch die Gleichung der F_e^4-Fläche bestätigt werden. Sie liefert die Schnittkurve der F_e^4 mit ε_∞, wenn $x_4 = 0$ gesetzt wird. Dabei heben sich die mit dem variablen Parameter e^z behafteten Glieder fort, übrig bleibt die Gleichung von $\mathfrak{K}_\infty^2$. Der Exponent 2, mit dem die Gleichung noch behaftet ist, weist darauf hin, dass die F_e^4 mit ε_∞ keine andern Punkte als die von $\mathfrak{K}_\infty^2$ gemein hat, was auch nach der Definition der F_e^4 völlig klar ist.

In der Tat lässt sich nun $\mathfrak{K}_\infty^2$ als Doppelkurve der F_e^2 nachweisen, woraus es sich dann erklärt, dass $\mathfrak{K}_\infty^2$ als Schnittkurve von ε_∞ mit F_e^4 doppelt zählt. — Zu dem Beweise, dass ein beliebiger Punkt S_∞ von $\mathfrak{K}_\infty^2$ Doppelpunkt der F_e^4-Fläche ist, bedienen wir uns wieder des Criteriums (A): Wir legen durch S_∞ eine beliebige Gerade g und suchen in g die dem Punkte S_∞ in beiderlei Sinne in $\mathfrak{V}(g)$ entsprechenden Punkte auf. Hierzu haben wir zunächst um S_∞ die Kugel $\mathfrak{K}_e^2$ mit dem Radius e zu schlagen und an diese von der Polare g′ von g aus die Tangentialebenen zu legen. g′ nun liegt in der Asymptotenebene σ, der Polarebene von S_∞, und da nach Satz (I), S. 10 $\mathfrak{K}_e^2$ sich auf S_∞ reduziert, so fallen die beiden von g′ aus an $\mathfrak{K}_e^2$ gelegten Tangentialebenen mit σ zusammen. Da nun die Pole dieser beiden Tangentialebenen die dem Punkte S_∞ im einen Sinne in $\mathfrak{V}(g)$ entsprechenden Punkte sind, so fällt S_∞ mit diesen beiden Punkten zusammen. —

Die dem Punkte S_∞ im anderen Sinne in $\mathfrak{B}(g)$ entsprechenden Punkte werden in g eingeschnitten durch die beiden zur Polarebene σ von S_∞ im Abstande e parallelen Ebenen σ' und σ'_1; beide schneiden, da auch $g \parallel \sigma$ ist, g in S_∞, d. h. S_∞ ist doppelte Coincidenz von $\mathfrak{B}(g)$ und somit, da g beliebig gewählt war, Doppelpunkt von F^4_e, wobei es auf den Wert von e nicht ankommt.

Dieser Beweis der Duplicität von S_∞ auf F^4_e gilt auch für jeden Punkt des unendlich fernen Geradenpaares eines Paraboloids und insbesondere für den Doppelpunkt dieses Geradenpaares, den Mittelpunkt des Paraboloids. In diesem speciellen Falle ist beim Beweise noch Satz (III), S. 11 zu benutzen, da dann die Polarebene σ von S_∞ mit ε_∞ identisch ist. Also gilt ganz allgemein:

(*16a*). *Der unendlich ferne Kegelschnitt der Basisfläche eines Polarraumes ist Doppelkurve für dessen sämtliche* F^4_e-*Flächen*[1]). Dual:

(*16b*). *Alle* Φ^{IV}_e-*Flächen eines Polarraumes haben den Asymptotenebenenkegel der Basisfläche zum Doppelkegel.*

§ 3. Die beiden Spezialfälle e = 0 und e = ∞.

1.) Geben wir e den speciellen Wert e = 0, eine Bedingung, die mit der identisch ist, dass ein Punkt mit seiner Polarebene incidiere, so sind bekanntlich derartige Incidenzelemente, die Punkte und Tangentialebenen der F^2 des Polarraumes, nur im Polarraume mit reeller Basisfläche reell vorhanden. Da die Basisfläche des Polarraumes 2. Ordnung und 2. Klasse ist, so ist sie gemäss Satz (14a u. b) doppelt zu rechnen. Wir erhalten den Satz:

(*17a*). *Die* F^4_e *eines Polarraumes besteht für den Wert* e = 0 *aus dessen Basisfläche, doppelt und als Punktfläche aufgefasst.* Und dual:

(*17b*). *Die* Φ^{IV}_e *eines Polarraumes besteht für* e = 0 *aus dessen doppelt und als Ebenenfläche aufgefasster Basisfläche.*

---

[1]) Die 16 Geraden, die auf einer solchen Fläche 4. Ordnung liegen müssen, scheinen sämtlich imaginär zu sein. Es wird daher im Folgenden von ihnen nicht weiter die Rede sein.

Satz (17a) wird bestätigt durch die allgemeine Gleichung der F_e^4-Fläche, welche für $e = 0$ übergeht in die Gleichung:

$$[x^2bc + y^2ca + z^2ab - abc]^2 = 0,$$

also in der Tat in die Gleichung der doppelt gerechneten zu Grunde liegenden F^2.

2.) Der zweiten speciellen Bedingung $e = \infty$ genügen zunächst alle Punkte von ε_∞, nach Satz (15a) auch diejenigen von $\mathfrak{K}^2_\infty$. Also wird ε_∞ einen Teil der F^4_∞ ausmachen, welche somit zerfällt. Aus Satz (VII), S. 16 ist ferner zu schliessen, dass die Pole der isotropen Ebenen von ihren Polarebenen ∞ grossen Abstand haben. Sei t_∞ eine Tangente von $\mathfrak{K}^2_a$, so liegen die Pole aller durch t_∞ gehenden isotropen Ebenen auf der Polare t' von t_∞, einem Durchmesser. Somit bilden die Pole aller isotropen Ebenen des Raumes einen reell-imaginären Kegel 2. Ordnung K^2_i, dessen Spitze der Mittelpunkt M des Polarraumes ist und dessen Kanten die Polaren der Tangenten von $\mathfrak{K}^2_a$ sind.

Aus der Gleichung der F^4_∞-Fläche, die man erhält, wenn man die allgemeine Gleichung der F^4_e-Fläche:

$$[x_1^2bc + x_2^2ca + x_3^2ab - x_4^2abc]^2$$
$$- e^2[x_4^2(x_1^2b^2c^2 + x_2^2c^2a^2 + x_3^2a^2b^2)] = 0$$

durch e^2 dividiert und hierauf $e = \infty$ setzt:

$$x_4^2(x_1^2b^2c^2 + x_2^2c^2a^2 + x_3^2a^2b^2) = 0,$$

folgt in der Tat, dass F^4_∞ zerfällt; und es folgt weiter vermöge der Gleichung $x_4^2 = 0$, dass die unendlich ferne Ebene als der eine Bestandteil der F^4_∞ doppelt zu zählen ist. Die Gleichung: $x_1^2b^2c^2 + x_2^2c^2a^2 + x_3^2a^2b^2 = 0$ ist die Gleichung von K^2_i, wovon man sich folgendermassen überzeugen kann: Es sei $(\bar{x}_1 .. \bar{x}_4)$ ein Punkt des durch die Gleichung: $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 0$ dargestellten Kegels. Die Gleichung der Polarebene des Punktes $(\bar{x}_1 .. \bar{x}_4)$ in Bezug auf die F^2 des Polarraumes lautet: $\frac{x_1\bar{x}_1}{a} + \frac{x_2\bar{x}_2}{b} + \frac{x_3 \cdot \bar{x}_3}{c} - x_4\bar{x}_4 = 0$. Die drei Ebenencoordinaten: $\xi = \frac{\bar{x}_1}{a}$, $\eta = \frac{\bar{x}_2}{b}$, $\zeta = \frac{\bar{x}_3}{c}$ dieser Ebene genügen

nun der Gleichung $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0$, also der Gleichung der als ausgeartete Fläche 2. Klasse aufgefassten absoluten Kurve, d. h. $(\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_4)$ ist Pol einer isotropen Ebene, und das war zu zeigen. Ergebnis:

(*18a*). *Die* F^4_∞ *eines Polarraumes besteht aus der doppelt gerechneten unendlich fernen Ebene und aus einem imaginären Kegel zweiter Ordnung mit* M *als Mittelpunkt, dessen Punkte die Pole der isotropen Ebenen des Raumes und dessen Kanten demgemäss die Polaren der Tangenten der absoluten Kurve sind.*

Durch Polarisieren folgt:

(*18b*). *Die* Φ^{IV}_∞ *eines Polarraumes besteht aus dem doppelt zu zählenden Bündel der Durchmesserebenen und der ausgearteten Fläche zweiter Klasse, welche von den isotropen Ebenen des Raumes umhüllt wird.*

Der Klassenfläche der isotropen Ebenen und somit auch der Φ^{IV}_∞ gehört als Doppelebene die ε_∞ an, was polar der Tatsache gegenübersteht, dass der imaginäre Kegel K^2_i, der einen Teil von F^4_∞ ausmacht, M zum reellen Doppelpunkte hat.

§ 4. Die Büscheleigenschaft der F^4_e-Flächen.

Wie in der Ebene bei den C^4_e-Kurven kann im Raume gefolgert werden, dass die F^4_e-Flächen einen Büschel von Flächen vierter Ordnung bilden. Die Gleichung der F^4_e-Fläche:

$$[x_1^2 bc + x_2^2 ca + x_3^2 ab - x_4^2 abc]^2$$
$$- e^2[x_4^2(x_1^2 b^2 c^2 + x_2^2 c^2 a^2 + x_3^2 a^2 b^2)] = 0$$

zeigt die Büscheleigenschaft unmittelbar. Büschelparameter ist e^2. Setzen wir in der Gleichung $e = 0$, so erhalten wir durch die Gleichung:

$$[x_1^2 bc + x_2^2 c.a + x_3^2 a.b - x_4^2 abc]^2 = 0$$

die als F^4_0-Fläche doppelt zu rechnende F^2 als die eine der durch die Büschelgleichung gelieferten Constituenten des Flächenbüschels. Die andere Constituente wird nach Division der Büschelgleichung durch e^2 erhalten, dadurch, dass $e = \infty$ gesetzt wird. Es ergibt sich die oben behandelte F^4_∞-Fläche.

Ein Büschel von Flächen 4. Ordnung hat eine Grundkurve 16. Ordnung. Alle F^4_e-Flächen haben nun den ∞ fernen

Kegelschnitt $\mathfrak{K}^2_\infty$ der F^2 zur Doppelkurve. Diese ist als Schnittkurve der F^4_e-Flächen vierfach zu zählen und stellt also eine Raumkurve 8. Ordnung dar. $\mathfrak{K}^2_\infty$ ist der Schnitt des Teiles $(x_4{}^2 = 0)$ der zweiten Constituente mit der ersten Constituente: $[\frac{x_1{}^2}{a} + \frac{x_2{}^2}{b} + \frac{x_3{}^2}{c} - x_4{}^2]^2 = 0$. Die restierende Schnittkurve 8. Ordnung muss geliefert werden durch den Schnitt der Doppelfläche F^4_0 mit der Fläche: $\frac{x_1{}^2}{a^2} + \frac{x_2{}^2}{b^2} + \frac{x_3{}^2}{c^2} = 0$, d. h. mit dem imaginären Kegel K^2_i. Diese beiden Flächen schneiden einander in einer Raumkurve 4. Ordnung I. Art $\overset{i}{r}{}^4_I$, die natürlich imaginär ist. Da jeder Punkt von F^2 Doppelpunkt von F^4_0 ist, so zählt $\overset{i}{r}{}^4_I$ als Schnittkurve von F^4_0 mit K^2_i doppelt. Dies bedeutet, dass diese beiden Flächen einander längs $\overset{i}{r}{}^4_I$ berühren. Ist nämlich P ein beliebiger Punkt von r^4_I, τ die in ihm den Kegel K^2_i berührende Ebene, so ist τ zugleich Tangentialebene von F^4_0 in P, da ja P Doppelpunkt von F^4_0 ist. Somit haben K^2_i und F^4_0 in jedem Punkte von $\overset{i}{r}{}^4_I$ dieselbe Tangentialebene.

Da sich also zwei Flächen des Flächenbüschels längs $\overset{i}{r}{}^4_I$ berühren, so müssen auch die übrigen F^4_e-Flächen längs $\overset{i}{r}{}^4_I$ (welche Kurve ja sicher auf allen F^4_e-Flächen liegt, Satz (VII), S. 16) denselben Torsus von Tangentialebenen haben. Es muss sich also beweisen lassen, dass jede F^4_e-Fläche in einem Punkte P von $\overset{i}{r}{}^4_I$, dessen Tangentialebene an K^2_i die Ebene τ ist, von dieser Ebene τ berührt wird. Es ist also nachzuweisen, dass jeder Strahl l des Strahlenbüschels (P,τ) in P eine F^4_e beliebigen Parameters e berührt, also mit F^4_e in P zwei vereinigte Punkte gemein hat. Dies ist der Fall, wenn $\mathfrak{P}(l)$ in P eine doppelte Coincidenz hat.

Die Polarebene π von P incidiert mit P, da P ein Punkt von F^2 ist. Sie geht ferner durch die Tangente t_∞ von $\mathfrak{K}^2_a$, welche dem Durchmesser $PM = t'$ polar ist. Der

Pol der Ebene τ, welche K_l^2 längs t' berührt, ist der Punkt T_∞, in dem $\mathfrak{K}_a^2$ von t_∞ berührt wird. Also ist der zu dem Strahlenbündel (P,τ) polare: der Strahlenbüschel (T_∞,π). — Nun sei l ein beliebiger Strahl von (P,τ), l' seine Polare, welche also dem Strahlenbüschel (T_∞,π) angehört. Um die dem Punkte P im einen Sinne in $\mathfrak{B}(l)$ entsprechenden Punkte P_1 und P_2 zu finden, haben wir die Pole der beiden Ebenen aufzusuchen, welche von l' aus an die um P mit dem Radius e geschlagene Kugel $\mathfrak{K}_e^2$ gehen. (Vgl. S. 53). $\mathfrak{K}_e^2$ wird in T_∞ von der durch ihren Mittelpunkt gehenden isotropen Ebene π berührt. Da l' durch T_∞ geht und in π liegt, so vereinigt π in sich die beiden von l' aus an $\mathfrak{K}_e^2$ gehenden Tangentialebenen, und da ferner P der Pol von π ist, so coincidiert P mit P_1 und P_2. Die dem Punkte P im andern Sinne in $\mathfrak{B}(l)$ entsprechenden Punkte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ sind die Schnittpunkte der Ebenen, welche parallel zur Polarebene π von P im Abstande e gelegt werden können, mit l. Nun vereinigt π als isotrope Ebene in sich alle zu π in einem beliebigen endlichen Abstande parallelen Ebenen (Satz (VIIb) S. 17) d. h. P fällt auch mit den Punkten $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ zusammen und ist demnach gemäss Criterium (A) (S. 29) eine doppelte Coincidenz von $\mathfrak{B}(l)$, also Tangente von F_e^4 in P. Dasselbe gilt für alle Strahlen des Strahlenbüschels (P,τ); τ berührt F_e^4 in P. Und da dies für alle Punkte von $\overset{i}{r}{}_l^4$ und für alle F_e^4-Flächen gilt, so berühren sämtliche F_e^4-Flächen einander längs $\overset{i}{r}{}_l^4$, und diese Kurve stellt somit, doppelt gerechnet, die restierende Schnittkurve 8. Ordnung des F_e^4-Flächenbüschels dar. Wir erhalten den Satz:

(*19*). *Die F_e^4-Flächen eines Polarraumes bilden einen Büschel von Flächen vierter Ordnung. Die Grundkurve dieses Büschels besteht aus dem vierfach gerechneten unendlich fernen Kegelschnitt $\mathfrak{K}_\infty^2$ der F^2, welcher Doppelkurve für jede F_e^4-Fläche ist, und aus einer doppelt gerechneten, imaginären Raumkurve vierter Ordnung erster Art, $\overset{i}{r}{}_l^4$, welche auf der F^2 verläuft und längs welcher die F_e^4-Flächen einander berühren.*

Die Tangentialebenen von K_i^2 *sind Doppeltangentialebenen jeder Fläche des Büschels; die beiden Berührungspunkte sind die Schnittpunkte der Berührungskante von* K_i^2 *mit* $\overset{i}{r}{}_I^4$.

Polar folgt, dass die Φ_e^{IV}-Flächen eine Schar von Flächen vierter Klasse bilden. Zum Grundtorsus 16. Klasse dieser Flächenschar gehört zunächst der vierfach gerechnete Asymptotenebenenkegel, der für jede Φ_e^{IV}-Fläche Doppelkegel ist; ausserdem noch ein imaginärer Torsus 4. Klasse I. Art $\overset{i}{\rho}{}_I^{IV}$, welcher doppelt zu rechnen ist, da jede seiner Ebenen alle Φ_e^{IV}-Flächen in demselben Punkte, ihrem Berührungspunkte mit $\mathfrak{K}_a^2$, berührt. $\mathfrak{K}_a^2$ ist Doppelkurve sämtlicher Φ_e^{IV}-Flächen, wie die eigentlichen Tangentialebenen von K_i^2 Doppeltangentialebenen für jede F_e^4-Fläche sind. $\overset{i}{\rho}{}_I^{IV}$ besteht aus den isotropen Ebenen, die der Tangentialebenenbündel der F^2 mit dem Tangentialebenenbündel der als ausgeartete Fläche 2. Klasse aufgefassten absoluten Kurve gemein hat. Die Ebenen von $\overset{i}{\rho}{}_I^{IV}$ berühren die F^2 längs $\overset{i}{r}{}_I^4$, welche bekanntlich zum System der Krümmungslinien der Basisfläche gehört.

§ 5. Allgemeine Eigenschaften der F_e^4, Konstruktion derselben.

Für die folgenden Untersuchungen setzen wir zunächst stets Polarräume mit endlichem Mittelpunkte M voraus, Polarräume mit unendlich fernem Mittelpunkte sollen weiter unten behandelt werden.

Es sei P ein beliebiger Punkt von F_e^4. Wir verbinden ihn mit M durch den Durchmesser $PM = d$. Die Polarebene π von P, die nach unserer Voraussetzung von P den Abstand e hat und also die Φ_e^{IV} berührt, ist zu der Durchmesserebene δ parallel, welche im Polarbündel um den Mittelpunkt M dem Durchmesser d polar ist. Ist $(\pi \mid d) = P'$, so sind P und P′ gepaarte Punkte von J(d). Demnach geht die Polarebene π' von P′ durch P und ist, da P′ ebenfalls auf d liegt, zu π und δ parallel. Es ist also das von P′ auf π' gefällte Lot = e, d. h. P′ liegt auf F_e^4, π' berührt Φ_e^{IV}.

Nun seien auf d P_1 und P'_1 die zu P bezw. P′ bezüglich M symmetrischen Punkte. Sie sind gepaart in J(d), wie aus der Symmetrie des Polarraumes in Bezug auf M folgt. Die Polarebene π_1 von P_1 geht also durch P'_1, und da sie ausserdem parallel zu π verläuft, so ist P_1 von π_1 ebenso weit entfernt, wie P von π. P_1 liegt also ebenfalls auf F_e^4, und dual berührt π_1 die Φ_e^{IV}. Dasselbe gilt von P'_1 und π'_1, wo π_1' durch P_1 geht.

Ist der Durchmesser d gegen seine conjugierte Durchmesserebene δ unter dem Winkel φ geneigt, so erkennt man, dass: $PP' = \frac{e}{\sin \varphi} = \bar{e}$ ist.

Also ist im Allgemeinen $PP' \geqq e$. Nur für $\varphi = 90^0$, d. h. für Durchmesser, die auf ihren conjugierten Durchmesserebenen senkrecht stehen, ist $PP' = e$ selbst. Da P und P′ ebenso wie P_1 und P'_1 gepaarte Punkte von J(d) sind, so bedeutet obige Gleichung, dass die Schnittpunkte eines Durchmessers mit der F_e^4 nicht anderes sind, als die beiden $\bar{e}$-Paare der auf diesem Durchmesser liegenden Involution conjugierter Punkte. Und weiter folgt, dass für die Hauptaxen des Polarraumes und nur für diese die Schnittpunkte mit der F_e^4 die e-Paare der auf ihnen liegenden Involution conjugierter Punkte sind.

Fasst man einen beliebigen Punkt X in einer der drei Hauptebenen, etwa in α, auf, so geht seine Polarebene ξ durch A_∞, den Pol von α, und steht also auf α senkrecht. Der Abstand $(X—\xi)$ wird also in α gemessen und ist gleich dem Abstande des Punktes X von seiner Polare $x = (\xi,\alpha)$ im Polarfelde (α). Es wird also jeder Punkt der F_e^4 in α zugleich ein Punkt der C_e^4 des in α liegenden, durch den Polarraum hervorgerufenen Polarfeldes (α) sein. Dies gibt den Satz:

(*20*). *Die Schnittkurven der* F_e^4 *mit den drei Hauptebenen des Polarraumes sind die in diesen Ebenen liegenden und zu deren Polarfeldern gehörigen* C_e^4*-Kurven.*

(Zu diesem Satze stimmt das oben über die Hauptaxen Gesagte.)

Man macht sich leicht klar, dass das nur für die Hauptebenen, für keine andere Durchmesserebene, überhaupt für keine andere Ebene mehr eintreten kann, da alle andern Ebenen entweder endliche oder im Unendlichen in schiefer Richtung zu ihnen gelegene Pole haben. Ist ξ eine beliebige Ebene, X ihr Pol, so wird nur für die Ebenen durch X, die durch das von X auf ξ gefällte Lot l gehen, der Abstand, den sie von ihren in ξ gelegenen Polen haben, in ξ selbst gemessen. Und vermöge der Ordnung „4“ der F_e^4 gibt es auf der Polare l′ von l in ξ vier Punkte, für welche das von ihnen auf ihre durch l gehende Polarebene gefällte Lot = e ist.

Jede unendlich ferne Gerade eines Polarraumes ist Axe einer Involution conjugierter Parallelebenen. Bezeichnen wir die Polare des Durchmessers d mit d'_∞, so laufen die Polarebenen π, π', π_1, π'_1 von P, P′, P_1, P'_1 durch d'_∞. Von ihnen sind π und π' sowie π_1 und π'_1 in $J(d'_\infty)$ gepaart, und der Abstand von π und π' ebenso wie der Abstand von π_1 und π'_1 ist = e. Hieraus folgt die Konstruktionsvorschrift:

„Die durch eine ∞ ferne Gerade d'_∞ an die Φ_e^{IV} gehenden Tangentialebenen sind zu construieren als die beiden e-Ebenen-Paare der Parallelebeneninvolution $J(d'_\infty)$.“

Dieser Satz steht der Regel dual gegenüber, welche vorschreibt, auf einem Durchmesser d die Punkte der F_e^4 als die ē-Paare von J(d) zu construieren.

Ist die Involution conjugierter Punkte auf d elliptisch, so liegen P und P'_1 auf der einen Seite von M, P_1 und P′ auf der anderen Seite. Die Schnittpunkte von d mit F_e^4, also die ē-Paare von J(d) werden nur dann reell vorhanden sein, wenn ē nicht kleiner als die Entfernung der Potenzpunkte von J(d) ist. (Vgl. S. 25).

Ist J(d) hyperbolisch, und sind D_1 und D_2 die Doppelpunkte von J(d), also die Schnittpunkte von d mit der F^2 des Polarraumes, so liegen P und P′ auf derselben Seite von M, P_1 und P'_1 auf der entgegengesetzten. Beide Paare trennen D_1 und D_2 harmonisch, beide ē-Paare sind stets reell vorhanden. Wir erhalten den Satz:

(*21*). *Auf jedem Durchmesser* d *eines Polarraumes, der die Basisfläche* F^2 *desselben reell schneidet, trennen seine Schnittpunkte mit* F_e^4 *die auf* d *liegenden Punkte der* F^2 *zu zweien harmonisch.*

Auf jeder Kante s des Asymptotenkegels A^2 der F^2 liegt eine parabolische Involution conjugierter Punkte, deren singulärer Punkt der unendlich ferne Punkt S_∞ von s ist. In ihm sind 2 der 4 Schnittpunkte von s mit F_e^4 vereinigt. Die beiden andern, S′ und S'_1, können, da in diesem Falle $\varphi = 0^0$, $\bar{e} = \infty$ wird, nicht nach der obigen Konstruktionsvorschrift gewonnen werden, da jeder Punkt von s ein ∞-Paar mit S_∞ bildet. Aber S′ und S'_1 sind die Pole der beiden zur Polarebene von S_∞, der durch s gehenden Asymptotenebene σ, im Abstande e parallelen Ebenen σ' bezw. σ'_1, und als solche zu gewinnen. Sie liegen, wegen der Symmetrie der F_e^4 bezüglich M, zu einander in Bezug auf M symmetrisch und um so näher an M, je grösser e ist.

Die Punkte S′ und S'_1 auf sämtlichen durch M gehenden Asymptoten bilden eine gewisse Raumkurve, deren Ordnung wir bestimmen können. Sie gehört zur Schnittkurve 8. Ordnung des Asymptotenkegels A^2 mit F_e^4. Zu dieser Schnittkurve 8. Ordnung gehört andererseits auch der unendlich ferne Kegelschnitt $\mathfrak{K}_\infty^2$, welcher doppelt zu zählen ist, da er auf F_e^4 Doppelkurve ist. Somit ist die von den Punkten S′ und S'_1 auf A^2 gebildete Kurve eine Raumkurve 4. Ordnung, s^4. Sie mag aus später zu entwickelnden Gründen „Uebergangskurve“ heissen.

§ 6. Die Gestaltung der F_e^4 bei den verschiedenen Arten von Polarräumen mit endlichem Mittelpunkte.

Wir verlassen nunmehr die allgemeinen Betrachtungen über die F_e^4 und wenden uns der Besprechung der F_e^4 zu für die besonderen Formen der Flächen 2. Ordnung mit endlichem Mittelpunkte.

1). Die F_e^4 eines Ellipsoids.

Dieses werde mit E^2 bezeichnet. Es hat mit ε_∞ einen imaginären Kegelschnitt gemein, demnach ist die Doppelkurve

der F_e^4 beim Ellipsoid imaginär. E^2 schneidet alle Durchmesser reell und im Endlichen, also sind auf jedem Durchmesser d die vier ē-Punkte P, P′, P_1, P'_1 reelle und endliche Punkte. Wird P im Innern von E^2 angenommen, so liegt auch P_1, der zu P bezüglich M symmetrische ē-Punkt von J(d), im Innenraume des Ellipsoides, P′ und P'_1 liegen im Aussenraume. Auf jedem Durchmesser liegen also zwei seiner Schnittpunkte mit F_e^4 innerhalb, die beiden andern ausserhalb E^2, also wird die F_e^4 aus zwei getrennten, in sich geschlossenen, ellipsoidartigen Teilen, Ovaloiden, bestehen, von denen das eine ganz innerhalb, das andere ganz ausserhalb von E^2 liegt, so zwar, dass das äussere Ovaloid das Ellipsoid umschliesst, und dass E^2 selbst in dem Raume zwischen den beiden Ovaloiden verläuft. Beide Ovaloide sind symmetrisch in Bezug auf M, α, β, γ und a, b, c, was die Anschaulichkeit erhöht.

Jede Durchmesserebene wird F_e^4 in zwei getrennten Ovalen, den beiden Ovaloiden entstammend, schneiden, zwischen denen die Schnittellipse dieser Ebene mit E^2 verläuft. Die Schnittkurven von F_e^4 mit den Hauptebenen α, β, γ sind die zu den Hauptellipsen in α, β, γ gehörigen C_e^4-Kurven. (Satz (20)); sie bestehen in der Tat (nach Satz (10) S. 39) je aus zwei getrennten Ovalen, deren eines das andere und die entsprechende Hauptellipse umschliesst.

Gibt man dem Parameter e andere und andere Werte, so erhält man den ganzen Büschel der zu E^2 gehörigen F_e^4-Flächen. Für immer mehr wachsende Werte von e weichen die beiden Ovaloide immer weiter von einander, indem das äussere sich immer mehr erweitert, das innere sich immer mehr nach M zusammenzieht. Schliesslich geht für $e = \infty$ das äussere Ovaloid in ε_∞ über, das innere Ovaloid zieht sich reell völlig auf M zusammen.

Bei immer kleiner werdendem e erweitert sich das innere Ovaloid immer mehr nach E^2 hin, das äussere zieht sich immer mehr auf E^2 zusammen. Bei $e = 0$ haben sich beide Ovaloide mit E^2 vereinigt, wodurch eben E^2 zur Doppelfläche des F_e^4-Flächen-Büschels wird. (Vgl. Satz (17a) S. 56).

Ist E^2 ein Rotationsellipsoid, so ist natürlich auch jede F_e^4 eine Rotationsfläche. Jede Ebene σ senkrecht zur Rotationsaxe schneidet F_e^4 in zwei concentrischen Kreisen, die indessen nicht identisch sind mit den e-Kreisen des Schnittkreises von σ mit E^2. Dagegen sind die Schnittkurven aller Ebenen durch die Rotationsaxe die C_e^4-Kurven dieser Ebenen, da jede derselben als Hauptebene zu bezeichnen ist.

Die F_e^4 einer reellen Kugel K^2 ist eine anallagmatische Fläche: Sie hat die absolute Kurve zum Doppelkegelschnitt und besteht aus zwei mit K^2 concentrischen Kugeln, deren Radien die Differenz e haben. Ist r der Radius von K^2, so ist der Radius der inneren „e-Kugel“:

$$r_i = \sqrt{\frac{e^2}{4} + r^2} - \frac{e}{2}.$$

Jede Mittelpunktsebene schneidet die F_e^4 in der C_e^4 ihres Schnittkreises mit K^2. Aber die C_e^4 einer beliebigen Ebene ε ist nicht identisch mit der Schnittkurve von ε mit F_e^4. — Bemerkenswert ist der Fall der Kugel noch vor allem dadurch, dass die Fläche der Tangentialebenen der F_e^4 für jeden Wert von e, nicht bloss, wie sonst, für $e = 0$, mit der Φ_e^{IV} identisch ist, und zwar sind die Tangentialebenen der Punkte der einen e-Kugel die e-Ebenen für die Punkte der andern.

2.). Die F_e^4 beim einschaligen Hyperboloid.

Ein einschaliges Hyperboloid H_I^2 sei gegeben. Seine imaginär schneidende Axe sei die c-Axe, 2ci ihre Länge. H_I^2 umschliesst seinen Asymptotenkegel A^2 und das zu H_I^2 conjugierte zweischalige Hyperboloid $H_{II}^{2\prime}$.

Obwohl es beim einschaligen Hyperboloid nicht üblich ist, einen Aussen- und Innenraum zu unterscheiden, da von jedem Punkte des Raumes aus ein reeller Tangentenkegel an H_I^2 geht, so wollen wir doch eine derartige Unterscheidung, da sie für die vorliegende Untersuchung nützlich ist, in folgender Weise treffen: Auf einem beliebigen, H_I^2 in D_1 und D_2 reell schneidenden Durchmesser sollen alle Punkte, welche der Ergänzungsstrecke $D_1 . D_2$ angehören, zum Aussen-

raume A gerechnet werden. Alle Punkte von $D_1 D_2$ sowie alle Punkte eines imaginär schneidenden Durchmessers von H_I^2, ebenso alle Punkte von A^2 werden als zum Innenraume I gehörig angesehen. Beim zweischaligen Hyperboloid $H_{II}^{2\prime}$ ist bekanntlich der Aussenraum A′ derjenige Raum, in dem M liegt. Der Innenraum von $H_{II}^{2\prime}$ werde mit I′ bezeichnet.

Auf jedem Durchmesser d, der im Aussenraume von A^2 verläuft, ist J(d) hyperbolisch, also lassen sich die ē-Punkte von J(d) stets reell bestimmen. Von diesen liegen stets zwei nicht conjugierte aber zu M symmetrische, P und P_1, in I, die beiden andern, P′ und P'_1, liegen in A. Durchläuft also d den ganzen Aussenraum von A^2, so erhält man stets zwei reelle zu M symmetrische Punkte in A, die, wenn d sich A^2 nähert, immer weiter ins Unendliche hinausrücken; und zwei reelle zu M symmetrische Punkte in dem Teile von I, der dem Aussenraume von A^2 angehört. Nähert sich d dem Asymptotenkegel, so nähern sich die Punkte P und P_1 in I immer mehr der Uebergangskurve s^4 auf A^2. (Vgl. S. 64). Nimmt man hinzu, dass die Schnittkurven von α und β mit F_e^4 deren C_e^4-Kurven sind, also die C_e^4-Kurven von Hyperbeln, so erkennt man, dass die Punkte P′, P'_1 in A eine sich um H_I^2 schliessende Schale bilden, die $\mathfrak{K}_\infty^2$ enthält und, verglichen mit den Flächen 2. Ordnung, den Character eines einschaligen Hyperboloids aufweist. Ob diese Schale, die mit O_a bezeichnet werde, für sich ein geschlossenes Ovaloid bildet, kann vorläufig noch nicht entschieden werden.

Die eben angestellten Betrachtungen gelten, da in ihnen nichts über die Grösse von e vorausgesetzt wurde, für jeden Wert von e. Dagegen müssen wir für den inneren Scheitelraum von A^2 eine ähnliche Unterscheidung von Fällen machen, wie bei der Hyperbel. (S. 41).

Auf jedem Durchmesser d im inneren Scheitelraume von A^2 ist J(d) eine elliptische Involution, deren Potenzpunkte die Schnittpunkte D, D′ von d mit $H_{II}^{2\prime}$ sind. Wir setzen wieder DD′ = 2d. Dann sind die ē-Punkte von J(d), d. h. die Schnittpunkte von d mit F_e^4 nur reell, solange $\bar{e} \geq 2d$ ist. Wir können nun einen, dem Hilfssatze auf S. 40

ähnlichen Satz aufstellen, der über die Realität der Schnittpunkte eines imaginär schneidenden Durchmessers d von H_I^2 mit F_e^4 Aufschluss gibt.

Die Ebene [d | c] schneidet H_I^2 in einer Hyperbel $\mathfrak{H}^2$, deren C_e^4 wir uns denken. d schneide diese C_e^4 reell, dann ist, wenn d′ der d conjugierte Durchmesser von $\mathfrak{H}^2$ ist und φ' den spitzen von d und d′ gebildeten Winkel bedeutet:

$$\frac{e}{\sin \varphi'} \geqq 2d.$$

Nun liegt d′ in der im Polarbündel um M dem Durchmesser d polaren Durchmesserebene δ, folglich gilt für den spitzen Neigungswinkel $(d\,\delta) = \varphi$:

$$\varphi \leqq \varphi', \text{ d. h. } \frac{e}{\sin \varphi} \geqq \frac{e}{\sin \varphi'} \geqq 2d.$$

Also folgt:

„Wenn ein imaginär schneidender Durchmesser d von H_I^2 die C_e^4 des in der Ebene [d | c] gelegenen Polarfeldes reell schneidet, so sind auch seine Schnittpunkte mit F_e^4 reell vorhanden."

Ist s diejenige der beiden Asymptoten von $\mathfrak{H}^2$, mit welcher d den kleineren Winkel bildet, so schneidet nach dem Hilfssatze auf S. 40 auch jeder Durchmesser innerhalb des spitzen Winkels (s, d) die F_e^4 reell. Insbesondere werden alle Durchmesser des inneren Scheitelraumes von A^2 die F_e^4 reell schneiden, wenn die e-Punkte von J(c) reell sind. Wir nehmen daher zunächst an, dass

$$\text{I.} \quad e > 2c$$

sei. Dann schneidet die c-Axe die F_e^4 in vier reellen Punkten, den beiden reellen e-Paaren von J(c). Denn die Potenzpunkte C C′ dieser Involution, die Scheitelpunkte von $H_{II}^{2\prime}$, haben ja den Abstand 2c. Von den 4 e-Punkten auf c liegen zwei, P′ und P_1' innerhalb von $H_{II}^{2\prime}$, also in I′, die beiden andern, P und P_1, in A′. Durchläuft nun d den ganzen inneren Kegelraum von A^2, so sind, nach unserer oben gemachten Bemerkung, auf jedem Durchmesser zwei reelle ē-Paare construierbar, von denen zwei nicht conjugierte, aber zu M symmetrische ē-Punkte in I′ liegen, während sich

die beiden andern in A′ befinden. Nähert sich d den Strahlen von A^2, so rücken die beiden Punkte in I′ immer weiter hinaus, bis sie schliesslich in $\mathfrak{K}^2_\infty$ hineinfallen, wenn d mit einer Kante von A^2 zusammenfällt. Die Punkte in A′ bleiben stets im Endlichen und nähern sich, wenn d an A^2 heranrückt, der Uebergangskurve s^4. Man erkennt nun, dass die Punkte in I′ zwei je den $\mathfrak{K}^2_\infty$ enthaltende, innerhalb der Schalen von $H^2_{II}{}'$ liegende Schalen bilden, über deren Zusammenhangsverhältnisse weiter unten gesprochen werden wird. Die Figur dieser beiden Schalen, die mit O+ und O− bezeichnet werden mögen, hat, mit den Flächen 2. Ordnung verglichen, den Character des zweischaligen Hyperboloids. — Die Punkte P und P_1 auf den imaginär schneidenden Durchmessern von H^2_I gehen durch die Punkte S′ und S'_1 von s^4 (Vgl. S. 64) hindurch in die Punkte P und P_1 über, welche man auf den H^2_I reell schneidenden Durchmessern erhält. Diese Punkte P, P_1 bilden ein geschlossenes, ganz im Endlichen gelegenes Ovaloid, O_e, das den Mittelpunkt M symmetrisch umschliesst und durch die dem Mittelpunkte näheren e-Punkte auf den drei Hauptaxen geht.

Man kann dieses für $e > 2c$ gewonnene Resultat dadurch bestätigen, dass man nunmehr die Schnittkurven von α, β, γ mit F^4_e betrachtet, welche ja die C^4_e-Kurven der drei Hauptebenen sind. Die Schnittkurve in $\gamma = [a \mid b]$ besteht aus zwei getrennten Ovalen, zwischen denen die Hauptellipse von H^2_I verläuft. (S. Satz (10), S. 39). Das äussere Oval stammt von O_a, das innere von O_e her. Die Hauptebenen α und β schneiden H^2_I je in einer Hyperbel, deren imaginär schneidende Axe $= 2ci$ ist. Demnach bestehen nach Satz (11a) S. 43, da $e > 2c$ ist, die C^4_e-Kurven dieser Haupthyperbeln aus zwei getrennten Ovalen, deren eines, von O_e herstammend, ganz im Endlichen liegt und M symmetrisch umschliesst, während das andere, aus vier Zweigen bestehende und teils von O_a, teils von O+ und O− herstammende sich selbst zweimal im Unendlichen durchschneidet.

Darin liegt ein Hinweis auf die Zusammenhangsverhältnisse der drei Schalen, O_a, O+ und O−. Dass sie alle

drei zusammen ein einziges geschlossenes Ovaloid bilden, geht aus folgender Ueberlegung hervor (vgl. S. 41 u. ff.): Wir betrachten ein Schnittpunktepaar P,P′ eines Durchmessers d mit F_e^4. P gehöre O_e an, dann liegt P′ auf einer der drei Schalen O_a, $O+$ oder $O-$, je nach der Lage von d. Wenn d den ganzen Winkelraum um M durchläuft, beschreibt P das geschlossene Ovaloid O_e. Aus Stetigkeitsgründen muss also auch P′ ein geschlossenes Ovaloid durchlaufen, womit O_a, $O+$ und $O-$ als notwendig miteinander zusammenhängend erkannt sind. Wir wollen nun bestimmter unter $O+$ denjenigen der beiden, innerhalb der beiden Schalen von $H_{II}^{2\prime}$ gelegenen Flächenteile verstehen, der von dem positiven Halbstrahl der c-Axe, $c+$, getroffen wird. d liege zunächst so, dass P′ auf O_a liegt. Dann ist J(d) hyperbolisch, d. h. P und P′ liegen auf derselben Seite von M. Bewegt sich nun der Halbstrahl von d, auf dem P (also zunächst auch P′) liegt, nach $c+$ hin, so rückt P′ durchs Unendliche hindurch auf $O-$, sobald d bei seiner Bewegung den Mantel von A^2 durchschritten hat; denn dann ist J(d) elliptisch, und folglich liegen P und P′ auf verschiedenen Seiten von M. Daraus ist nun ohne weiteres zu folgern, dass der nach $c+$ hin sich erstreckende Teil von O_a mit $O-$, der nach $c-$ hin sich erstreckende Teil von O_a mit $O+$ durch $\mathfrak{K}_\infty^2$ hindurch zusammenhängt. Das von O_a, $O+$ und $O-$ gebildete Ovaloid durchschneidet sich selbst, und zwar in $\mathfrak{K}_\infty^2$, wodurch dieser Kegelschnitt zur Doppelkurve der F_e^4 wird.
Ergebnis:

(*22a*). *Die* F_e^4 *eines einschaligen Hyperboloides* H_I^2, *dessen imaginär schneidende Axe* $= 2ci$ *ist, besteht für jeden Wert* $e > 2c$, *aus zwei getrennten Ovaloiden, von denen das eine ganz im Endlichen liegt und den Mittelpunkt* M *von* H_I^2 *symmetrisch umschliesst. Das andere Ovaloid durchschneidet sich selbst in dem unendlich fernen Kegelschnitt* $\mathfrak{K}_\infty^2$ *von* H_I^2, *diesen Kegelschnitt so zur Doppelkurve von* F_e^4 *machend; es besteht aus drei Schalen, die durch* $\mathfrak{K}_\infty^2$ *hindurch mit einander zusammenhängen.*

Lassen wir $e > 2c$ immer mehr wachsen, so wird auf jedem Durchmesser $\bar{e} = \frac{e}{\sin \varphi}$ grösser, da φ constant ist, und von den $\bar{e}$-Punkten von J(d) rücken die dem Mittelpunkte näheren, P und P_1, immer mehr an M heran, P' und P'_1 entfernen sich immer mehr von M. Dabei ist es gleichgültig, ob J(d) hyperbolisch oder elliptisch ist. Daraus folgt, dass O_a sich immer mehr erweitert, dass $O+$ und $O-$ sich immer weiter von den beiden Schalen $S+$ bezw. $S-$ von $H_{II}^{2\prime}$, in denen sie bezw. liegen, entfernen, und dass endlich O_e sich immer mehr auf M zusammenzieht. Für $e = \infty$ gehen O_a, $O+$ und $O-$ in ε_∞ über, O_e zieht sich reell völlig auf M zusammen, welcher Punkt dann Doppelpunkt des imaginären Kegels K_i^2 wird.

Lässt man umgekehrt den Abstandsparameter e immer kleiner werden und dem Werte 2c sich nähern, so folgt entsprechend, dass O_a sich dichter an H_I^2, $O+$ bezw. $O-$ an $S+$ bezw. $S-$ anschliessen, während O_e sich mehr und mehr erweitert. Ist schliesslich

II. $e = 2c$,

so sind die 4 Schnittpunkte der c-Axe mit F_e^4 in die beiden Scheitel C und C' von $H_{II}^{2\prime}$ hineingefallen, und $O+$ und $O-$ gehen durch C bezw. C' in O_e über. Nun sind die Schnittkurven der Hauptebenen α und β mit F_e^4 die C_e^4-Kurven der in α und β liegenden Haupthyperbeln. Diese C_e^4-Kurven zerfallen nach Satz (11b) S. 44 für $e = 2c$ je in zwei Hyperbeln, die einander in C und C' durchschneiden. Also ist jeder der beiden Punkte C und C' Doppelpunkt der Schnittkurven in zwei durch ihn gehenden Ebenen mit F_e^4. Dies bedeutet aber soviel als dass im Punkte C oder C' sich je drei nicht in einer Ebene liegende Strahlen schneiden, die je in C bezw. C' mit F_e^4 zwei vereinigte Schnittpunkte gemein haben, womit C und C' als Knotenpunkte der F_{2c}^4 erkannt sind. — Wir können das analytisch bestätigen. Bei dem einschaligen Hyperboloid ist in der Gleichung der F_e^4-Fläche $a = a^2$, $b = b^2$, $c = -c^2$, $e = 2c$ zu setzen, wodurch sich als Gleichung der F_{2c}^4-Fläche ergibt:

$$[x^2b^2c^2 + y^2c^2a^2 - z^2a^2b^2 - a^2b^2c^2]^2$$
$$- 4c^2[x^2b^4c^4 + y^2c^4a^4 + z^2a^4b^4] = 0.$$

Wir verschieben nun das Coordinatensystem parallel mit sich selbst bis sein Coordinatenanfangspunkt in C hineinfällt. Die neuen Coordinaten $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ sind mit den früheren durch die Gleichungen $\bar{x} = x$, $\bar{y} = y$, $\bar{z} = z - c$ verbunden. Somit ergibt sich als Gleichung der F^4_{2c} im neuen Coordinatensystem:

$$[\bar{x}^2b^2c^2 + \bar{y}^2c^2a^2 - (\bar{z} + c)^2a^2b^2 - a^2b^2c^2]^2$$
$$- 4c^2[\bar{x}^2b^4c^4 + \bar{y}^2c^4a^4 + (\bar{z} + c)^2a^4b^4] = 0.$$

Die Glieder nullter und erster Dimension dieser Gleichung lauten:

$$[4a^4b^4c^4 + 8\bar{z}a^4b^4c^3] - [4a^4b^4c^4 + 8\bar{z}a^4b^4c^3].$$

Ihr Verschwinden zeigt an, dass der neue Coordinatenanfangspunkt C Doppelpunkt der F^4_{2c} ist[1]). Und dasselbe lässt sich dann auch von C′ beweisen.

Also gehört die F^4_{2c} zu den Flächen vierter Ordnung mit einem Doppelkegelschnitte und zwei Doppelpunkten, deren Verbindungsgerade den Doppelkegelschnitt nicht schneidet. Jede durch die c-Axe gelegte Ebene schneidet die F^4_{2c} in zwei Hyperbeln, die aber, wie noch einmal ausdrücklich bemerkt werden möge, nur in den Hauptebenen α und β die C^4_e-Kurve dieser Ebene bilden. Die C^4_e einer beliebigen Ebene δ durch c zerfällt zwar für $e = 2c$ ebenfalls in zwei sich in C und C′ schneidende Hyperbeln, ist aber verschieden von der Schnittkurve von δ mit F^4_e.

Da sich also O_+ und O_- durch C bezw. C′ hindurch mit O_e vereinigt haben, so besteht die F^4_e von dem Werte $e = 2c$ an nur noch aus einem einzigen Ovaloide, dessen beide Schalen O_a und O_i ($= O_+ + O_e + O_-$) in derselben Weise durch $\mathfrak{K}^2_\infty$ hindurch zusammenhängen, wie oben O_+ und O_- mit O_a. Wenn

III. $e < 2c$

ist, so schneidet die c-Axe die F^4_e imaginär, da die e-Punkte von J(c) imaginär sind. Es gibt dann einen ge-

---

[1]) Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes. 1874. Teil II. S. 15ff.

wissen Kegel von Durchmessern, der die c-Axe umschliesst und dessen innerer Scheitelraum (um c herum) nur Durchmesser enthält, die mit F_e^4 keine reellen Punkte gemein haben. Die Kanten dieses Kegels sind sämtlich Doppeltangenten an F_e^4, seine Berührungskurven sind gewisse Einschnürungskurven der Schale O_i, welche sich für $e = 2c$ auf C bezw. C′ zusammenziehen.

Wird e immer kleiner, so ziehen sich die beiden Schalen O_a und O_i immer mehr auf H_I^2 zusammen. Für $e = 0$ fallen beide Schalen mit H_I^2 zusammen, wodurch die Doppelfläche des F_e^4-Flächenbüschels des einschaligen Hyperboloids zu Stande kommt. — Wir fassen die für $e = 2c$ und $e < 2c$ gefundenen Resultate in folgenden Sätzen zusammen.

(22*b*). *Die* F_e^4 *eines einschaligen Hyperboloids, dessen imaginär schneidende Axe* $= 2ci$ *ist, besteht für* $e = 2c$ *aus einem einzigen Ovaloide, das ausser dem Doppelkegelschnitte* $\mathfrak{K}_\infty^2$ *noch die Potenzpunkte von* J(c) *zu Doppelpunkten hat, und dessen beide,* H_I^2 *von beiden Seiten umschliessende Schalen durch* $\mathfrak{K}_\infty^2$ *hindurch mit einander zusammenhängen.*

Für $e < 2c$ *besteht die* F_e^4 *von* H_I^2 *aus einem Ovaloide, dessen beide Schalen sich dem* H_I^2 *von beiden Seiten anschliessen und welche durch* $\mathfrak{K}_\infty^2$, *die reelle Doppelkurve der* F_e^4, *hindurch von zwei Seiten her in einander übergehen.*

Die specielle Gestaltung der F_e^4 eines einschaligen Rotationshyperboloids macht man sich am Einfachsten klar, indem man eine Hyperbel mit ihren sämtlichen C_e^4-Kurven um ihre imaginär schneidende Axe rotieren lässt. Für $e = 2c$ enthalten die ebenen Schnitte durch die Rotationsaxe c sämtlich zwei congruente, durch C und C′ gehende Hyperbeln, welche die C_e^4-Kurven dieser Ebenen für $e = 2c$ darstellen. Die F_e^4 selbst kann in diesem Falle betrachtet werden als entstanden durch Rotation einer dieser Hyperbeln um die c-Axe, wobei die Nebenaxe der rotierenden Hyperbel der c-Axe im Abstande $\sqrt{a^2 + c^2}$ parallel läuft. (Vgl. S. 44).

3). Die F_e^4 eines zweischaligen Hyperboloides.

Für die Potenzen der Involutionen J(a), J(b), J(c) auf den Axen a, b, c des zu Grunde liegenden zweischaligen Hyperboloids H_{II}^2 mögen die Ungleichungen $c^2 > -b^2 > -a^2$ gelten, sodass c die reell schneidende Axe von H_{II}^2 ist.

Die Verhältnisse liegen hier ähnlich wie beim einschaligen Hyperboloide, wir können uns daher kürzer fassen. Für jeden Wert von e ergeben sich zwei Flächenteile, die wieder O+ und O− genannt werden mögen, innerhalb der beiden Schalen S+ bezw. S− von H_{II}^2. Jeder dieser Flächenteile enthält $\mathfrak{K}_\infty^2$. Wird zunächst

I. $e > 2a$

vorausgesetzt, so sind die ē-Paare auf allen imaginär schneidenden Durchmessern von H_{II}^2 reell. Ihre dem Mittelpunkte näheren beiden ē-Punkte bilden zusammen mit den dem Mittelpunkte näheren ē-Punkten der H_{II}^2 reell schneidenden Durchmesser ein ganz im Endlichen bleibendes, den Mittelpunkt M symmetrisch umschliessendes, ganz ausserhalb von H_{II}^2 gelegenes Ovaloid O_e. Die beiden dem Mittelpunkte ferneren ē-Punkte jedes H_{II}^2 imaginär schneidenden Durchmessers liegen auf einer Schale O_a, welche durch $\mathfrak{K}_\infty^2$ und die äusseren beiden e-Punkte von J(a) und J(b) geht. O_a liegt im Aussenraume von $H_I^{2\prime}$, dem zu H_{II}^2 conjugierten einschaligen Hyperboloid, das ja die Potenzpunkte der auf den imaginär schneidenden Durchmessern von H_{II}^2 gelegenen elliptischen Involutionen conjugierter Punkte enthält.

Die für Werte von $e > 2a$ sich ergebenden F_e^4-Flächen von H_{II}^2 sind also ähnlich denen, die wir beim einschaligen Hyperboloid H_I^2 für $e > 2c$ erhielten. Auch die Zusammenhangsverhältnisse sind hier dieselben wie dort: O_a, O+ und O−, welche ja die gepaarten Punkte derjenigen enthalten, welche das geschlossene Ovaloid O_e bilden, sind Schalen desselben geschlossenen Ovaloides. Bei

II. $e = 2a$

fallen die vier Schnittpunkte der a-Axe mit F_e^4 zu zweien in die Potenzpunkte A und A′ von J(a), also in die Haupt-

scheitel der Hauptellipse von $H_I^{2'}$ hinein. Nach Satz (12) S. 49,50 zerfällt die Schnittkurve von $\gamma = [a \mid b]$ mit F_e^4 in zwei Ellipsen, die einander in A und A′ schneiden; ferner besteht nach Satz (11b) S. 44 die Schnittkurve von $\beta = [a \mid c]$ mit F_e^4 aus zwei sich in A und A′ schneidenden Hyperbeln. Also sind A und A′ Doppelpunkte der F_e^4, da sie Doppelpunkte der Schnittkurven zweier verschiedener Ebenen mit F_e^4 sind. (Vgl. S. 71). Die F_{2a}^4 besteht nur noch aus einem einzigen Ovaloide, da die Schale O_a durch A und A′ hindurch in das bisherige in sich geschlossene Ovaloid O_e übergeht. Es werde $O_a + O_e = O_a'$ gesetzt. O_a' hängt mit $O+$ und $O-$ in ähnlicher Weise zusammen, wie bei der F_e^4 eines einschaligen Hyperboloids O_a mit $O+$ und $O-$ für Werte von $e > 2c$.

Jede durch die a-Axe gelegte Ebene schneidet F_{2a}^4 in zwei Kegelschnitten. Diese sind Hyperbeln in den Ebenen, welche $\mathfrak{K}_\infty^2$ reell schneiden, Ellipsen in den $\mathfrak{K}_\infty^2$ imaginär schneidenden Ebenen durch a. Ein Beispiel der ersteren Art bietet die Hauptebene β, eines der zweiten Art die Hauptebene γ. Den Uebergang zwischen beiden Arten von Ebenen bilden die beiden durch a gehenden Asymptotenebenen τ_1 und τ_2. Sie schneiden F_e^4 je in zwei Parabeln, die sich in A und A′ schneiden und einander und die unendlich ferne Gerade von τ_1 bezw. τ_2 in deren Berührungspunkten mit H_{II}^2 berühren. Beide Parabeln von τ_1 sowohl wie von τ_2 liegen ganz auf der Schale O_a', ebenso die beiden Ellipsen einer $\mathfrak{K}_\infty^2$ imaginär schneidenden Ebene durch a. Von den beiden Hyperbeln einer $\mathfrak{K}_\infty^2$ reell schneidenden Ebene durch a liegt je ein Ast auf O_a', der andere auf $O+$ oder $O-$.

III. $2a > e > 2b$

Hat e einen Wert, der der Ungleichung: $2a > e > 2b$ genügt, so schneidet die a-Axe die F_e^4 imaginär, da für solche Werte von e die e-Punkte von J(a) nicht mehr reell sind Daher besteht die Schnittkurve von $\gamma = [a \mid b]$ mit F_e^4 aus zwei getrennten, ganz im Endlichen und ausserhalb von einander gelegenen Ovalen, von denen jedes einen der Potenzpunkte B, B′ von J(b) umschliesst. (Vgl. Satz (12) S. 49 und 50).

Die Schnittkurven von α und β mit F_e^4 sind, wie man leicht erkennt, C_e^4-Kurven der in Fig. 1 S. 42 bezw. Fig. 2 S. 45 dargestellten Art. Daraus gewinnt man folgendes Bild der Schale O_a': Sie besteht gewissermassen aus zwei Teilen, $O_{a_m}^{+\prime}$ und $O_a^{-\prime}$. Der erstere umschliesst die Schale $S+$ von H_{II}^2 und hängt durch $\mathfrak{R}_\infty^2$ hindurch mit $O-$ zusammen, der letztere umschliesst $S-$ und hängt mit $O+$ durch $\mathfrak{R}_\infty^2$ hindurch zusammen. Aber die beiden Flächenteile $O_a^{+\prime}$ und $O_a^{-\prime}$ stehen überdies noch durch zwei im Endlichen gelegene, röhrenartige Flächenteile (vgl. Fig. 4: R und R′) miteinander in Verbindung. R und R′ schneiden eben in γ die erwähnten beiden Ovale ein, die B bezw. B′ umschliessen. In der nebenstehenden Figur 4 ist der Versuch gemacht, den centralen Teil der Schale O_a' anschaulich zu machen.

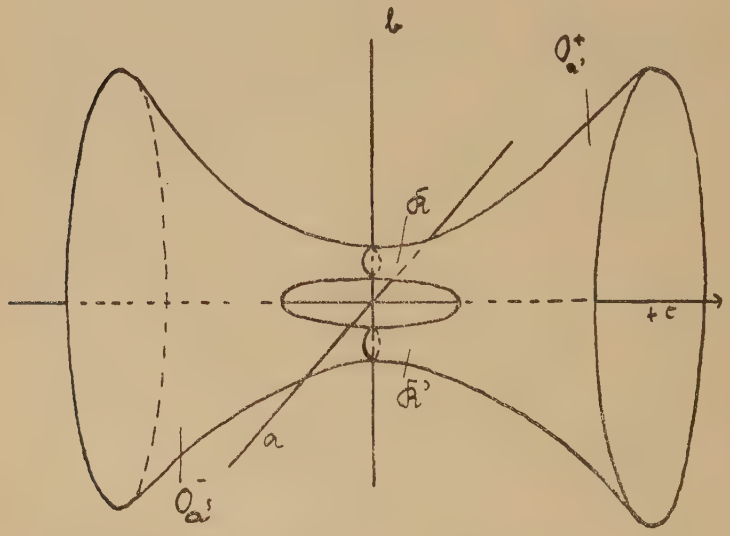

Fig. 4 [1]).

[1]) Die Figur stellt den Teil von O_a' dar, der etwa zwischen den beiden Hauptscheiteltangentialebenen von H_{II}^2 liegt. Gestrichelte Linien sind unsichtbar. Die beiden Ovale der C_e^4 in $\gamma = [a \mid b]$ sind angedeutet.

O_a' bildet mit $O+$ und $O-$ zusammen ein geschlossenes Ovaloid.

Für immer kleinere Werte von e ziehen sich R und R′ immer mehr gegen B bezw. B′ hin zusammen, um schliesslich für $e = 2b$ in B und B′ Doppelpunkte der F^4_{2b} zu liefern. Für $e = 2b$ besteht nämlich die Schnittkurve von γ mit F^4_e aus zwei conjugiert imaginären Kegelschnitten, die einander in B und B′ schneiden und diese Punkte zu (reellen) Doppelpunkten der C^4_{2b} in γ machen. (Vgl. Satz (12), S. 49). Auch die C^4_e von α besteht für $e = 2b$ aus einer zerfallenden Kurve vierter Ordnung mit B und B′ als Doppelpunkten, nämlich aus zwei sich in B und B′ durchschneidenden Hyperbeln, sodass in der Tat B und B′ Knotenpunkte von O_a' sind. $O_a^{+\prime}$ und $O_a^{-\prime}$ hängen nur noch durch B und B′ hindurch miteinander zusammen.

IV. $e < 2b$

Wird endlich $e < 2b$ angenommen, so stehen die beiden Teile $O_a^{+\prime}$ und $O_a^{-\prime}$ in gar keiner Verbindung mehr, da γ die F^4_e völlig imaginär schneidet. Da aber $O_a^{+\prime}$ und $O_a^{-\prime}$ durch $\mathfrak{R}^2_\infty$ hindurch in $O-$ bezw. $O+$ übergehen, so haben wir für $e < 2b$ wieder zwei geschlossene Ovaloide, die einander in $\mathfrak{R}^2_\infty$ schneiden. Dies bestätigt sich, wenn man die C^4_e-Kurven von α und β betrachtet, welche von der in Satz (11c) S. 46 geforderten Beschaffenheit sind.

Nähert sich e dem Werte 0, so schliessen sich $O+$ und $O_a^{+\prime}$ immer enger an $S+$, $O-$ und $O_a^{-\prime}$ immer enger an $S-$ an, wodurch deutlich wird, dass H^2_{II} für $e = 0$ zur Doppelfläche des F^4_e-Flächen-Büschels wird.

Der Uebergang von endlichen Werten von e zu $e = \infty$ ist in diesem Falle genau wie beim einschaligen Hyperboloid. (S. 71). Ergebnis:

(23). *Die* F^4_e *eines zweischaligen Hyperboloids* H^2_{II} *besteht für alle Werte von* e, *welche der Ungleichung* $e > 2a$ *oder* $e < 2b$ *genügen, aus zwei Ovaloiden. Von diesen liegt das eine, wenn* $e > 2a$ *ist, ganz im Endlichen und ausserhalb von* H^2_{II}, *es umschliesst* M *symmetrisch. Das andere, aus drei Schalen bestehende, liegt teils ausserhalb, teils innerhalb von* H^2_{II}

und geht zweimal durch $\mathfrak{K}^2_\infty$. *Ist* $e < 2b$, *so besteht jedes der beiden Ovaloide aus zwei Schalen, die durch* $\mathfrak{K}^2_\infty$ *hindurch zusammenhängen.*

Die F^4_e *ist ein einziges Ovaloid, wenn* $2a \geqq e \geqq 2b$ *ist. Das Ovaloid besteht in allen diesen Fällen aus drei Schalen, die durch* $\mathfrak{K}^2_\infty$ *hindurch zusammenhängen. Es hat im Falle* $e = 2a$ *und* $e = 2b$ *in den Potevzpunkten von* J(a) *bezw.* J(b) *Doppelpunkte.*

Beim zweischaligen Rotationshyperboloide ist der Fall von Interesse, in welchem $e = 2a$ ist, wo ai den Radius des in γ gelegenen reell-imaginären Kreises bedeutet. In diesem Falle nämlich besteht die F^4_e aus zwei zweischaligen Rotationshyperboloiden, die einander in dem reellen Kreise durchschneiden, welcher dem reell-imaginären Kreise in (γ) conjugiert ist. Diese F^4_e gehört also zu den Formen, welche aus zwei Ovaloiden bestehen, deren jedes zwei durch $\mathfrak{K}^2_\infty$ hindurch sich vereinigende Schalen besitzt.

4.). Die F^4_e eines reell-imaginären Ellipsoids.

Bei der Besprechung der F^4_e-Flächen eines Polarraumes mit reell-imaginärer Basisfläche wollen wir den umgekehrten Weg wie bisher einschlagen, indem wir die verschiedenen Formen von F^4_e für wachsende Werte von e betrachten, statt, wie im Vorangehenden, für abnehmende Werte von e.

Das reell imaginäre Ellipsoid E^2_i hat, wie das reelle, einen endlichen reellen Mittelpunkt und drei sich in ihm schneidende auf einander senkrechte Axen, die wir wieder mit a, b, c bezeichnen. Auf jedem Durchmesser, also auch auf den drei Axen liegt eine elliptische Involution conjugierter Punkte, deren Potenzpunkte auf dem E^2_i conjugierten reellen Ellipsoid $E^{2\prime}$ liegen. Die Potenzen der auf den Axen a, b, c liegenden Involutionen J(a), J(b), J(c) mögen der Ungleichung: $-c^2 > -b^2 > -a^2$ genügen.

Der vorliegende Polarraum hat keine reelle Basisfläche, also ist für ihn die F^4_e für $e = 0$ imaginär und sie wird auch zunächst noch imaginär bleiben, wenn man e von 0 an wachsen lässt. e-Pole und e-Ebenen sind zum ersten

Male reell vorhanden, wenn $e = 2c$ ist, wie folgender Satz lehrt.

„Diejenigen Punkte eines Polarraumes mit reell-imaginärer Basisfläche, die von ihren Polarebenen den kleinsten Abstand haben, sind die Potenzpunkte der Involution conjugierter Punkte auf derjenigen Hauptaxe, bei welcher diese Involution den algebraisch-grössten Wert hat.“

Den folgenden Beweis dieses Satzes hat Herr Geheimrat Sturm die Güte gehabt mir mitzuteilen und zur Veröffentlichung zu überlassen. Er stützt sich auf den Satz vom constanten Inhalt eines Parallelepipeds, das einem Ellipsoid so umgeschrieben ist, dass seine Flächen in den Endpunkten conjugierter Durchmesser berühren[1]):

Die Halbaxen eines (reellen) Ellipsoids seien $a > b > c$. Die Berührungsebenen in den Endpunkten der kleinsten Axe haben die kleinste Entfernung. In der Tat, es sei δ eine Durchmesserebene durch c, d der conjugierte Durchmesser zu δ, also in $\gamma \equiv [a \mid b]^{\delta}_{\varkappa}$ gelegen. δ schneide die Ebene γ in e. Es sind dann c und e die Axen in δ. Der Durchmesser d′ bewege sich in δ; wir betrachten das Prodnkt $dd'.\sin(d,d')$, worin nun d und d′ die Halbmesser sind, oder, da d constant ist, bloss: $d'.\sin(d,d')$; $e.\sin(d,e)$ ist der grösste Wert. Dazu führen wir noch die auf d normale Durchmesserebene φ

---

[1]) Diesen letzteren Satz beweist Herr Geheimrat Sturm mittels des analogen Satzes über die Ellipse — Satz von Apollonius — wie folgt: Wenn der Durchmesser d fest bleibt, also die beiden andern, d′, d″, die Involution conjugierter Durchmesser in der conjugierten Durchmesserebene δ durchlaufen, so ist die Grundfläche des Parallelepipeds gleich dem constanten Apollonischen Parallelogramm der Ellipse in δ, und die Höhe die feste Entfernung der beiden Berührungsebenen in den Endpunkten von d. Nun seien $d\,d'\,d''$, $d_1\,d'_1\,d''_1$ zwei Tripel conjugierter Durchmesser. d_2 sei Schnittdurchmesser von $[d'\,d'']$, $[d'_1\,d''_1]$, und e, e_1 ihm in der Involution von $d'\,d''$ bezw. $d'_1\,d''_1$ conjugiert. Dann ist Parallelepiped $[d\,d'\,d''] = [d\,d_2\,e]$,

$$[d_1\,d'_1\,d''_1] = [d_1\,d_2\,e_1].$$

d, e; d_1 e_1 sind conjugiert in der Durchmesserebene, welche d_2 conjugiert ist. Also $[d_2\,d\,e] = [d_2\,d_1\,e_1]$. Daher $[d\,d'\,d''] = [d_1\,d'_1\,d''_1]$, w. z. b. w. Vgl. auch Schroeter, Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung, S. 527.

ein, welche, weil d in γ liegt, durch c geht und γ in f schneidet. Die zu untersuchende Grösse ist dann $d' . \cos (d' \varphi)$, also die Orthogonalprojection des d′ auf φ. Der rechte Winkel (c,e) projiziert sich wieder in einen rechten (c,f); und c, e projicieren sich in ebenfalls conjugierte Durchmesser c, f, also, weil sie rechtwinklig sind, in die Axen, und zwar ist letztere, f, die grössere. Die Halbaxe ist $e . \cos (e \varphi) = e . \sin (d, e)$.

In der Ebene γ ist nach dem Satze des Apollonius, da d und e conjugiert sind: $de . \sin (d,e) = ab$, $e . \sin (d,e) = \frac{ab}{d}$; weil aber $a > d > b$, so ist $\frac{ab}{d} > b$ und $< a$, und weil $> b$ auch $> c$. Also ist der Halbmesser f der Orthogonalprojection in der Tat die grössere Axe und $e . \sin (d,e)$ der grösste Wert von $d' . \sin (d,d')$, und $de . \sin (d,e)$ der grösste Wert von $dd' . \sin (d,d')$.

Nun sei d″ ein beliebiger Durchmesser; die Ebene, die ihn mit c verbindet, sei δ, d wieder conjugiert zu δ, und d′ zu d″ in δ, so haben wir die beiden Tripel conjugierter Durchmesser dd′d″ und dce. Die zugehörigen Parallelepipede sind gleich; sie sind $4 dd' . \sin (d,d') . | d'' |$ und $4 de . \sin (d,e) . | c |$, wenn unter $| c |$, $| d'' |$ die Entfernungen der Tangentialebenen in den Endpunkten von c, d″ verstanden werden. Weil nun $e . \sin (d,e) > d' . \sin (d,d')$, so ist $| c | < | d'' |$, und damit ist die Behauptung bewiesen.

Jetzt liege ein reell-imaginäres Ellipsoid vor: $-c^2 > -b^2 > -a^2$. Die Entfernung eines Punktes P von seiner Polarebene π ist, wenn diese vom Durchmesser d durch P in P′ geschnitten wird und φ der Winkel dieses Durchmessers gegen die conjugierte Durchmesserebene und auch π ist: $PP' . \sin \varphi$, am kleinsten auf d, wenn P in einen der Schnitte D, D′ von d mit dem conjugierten Ellipsoid zu liegen kommt, und dann gleich der Entfernung $| d |$ der beiden Tangentialebenen in diesen Punkten; und diese Entfernung ist wieder am kleinsten, wenn es sich um die Endpunkte der kleinsten Axe des conjugierten Ellipsoids handelt, w. z. b. w.

Diese Axe ist in unserem Falle die c-Axe. Die Potenzpunkte von J(c), C und C′, sind die einzigen reellen Punke der F^4_{2c}-Fläche von E^2_1. Sie sind zugleich Doppelpunkte derselben, was aus Folgendem erhellt: Die Gleichung der F^4_{2c} lautet:

$$[x^2b^2c^2 + y^2c^2a^2 + z^2a^2b^2 + a^2b^2c^2]^2$$
$$- 4c^2[x^2b^4c^4 + y^2c^4a^4 + z^2a^4b^4] = 0.$$

Wir verschieben das Coordinatensystem, auf das diese Gleichung bezogen ist, parallel mit sich selbst, bis sein Ursprung nach C fällt. Dieser Verschiebung entsprechen die Transformationsgleichungen: $\bar{x} = x$, $\bar{y} = y$, $\bar{z} = z - c$. Durch Einsetzung dieser Werte ergibt sich:

$$[\bar{x}^2b^2c^2 + \bar{y}^2c^2a^2 + (\bar{z} + c)^2a^2b^2 + a^2b^2c^2]^2$$
$$- 4c^2[\bar{x}^2b^4c^4 + \bar{y}^2c^4a^4 + (\bar{z} + c)^2a^4b^4] = 0.$$

Wir stellen die Glieder 0. und 1. Dimension fest. Die gesuchten Glieder lauten: $[4a^4b^4c^4 + 8\bar{z}a^4b^4c^3] - [4a^4b^4c^4 + 8\bar{z}a^4b^4c^3]$, und zeigen dadurch, dass sie sich gegenseitig aufheben, dass C (und folglich auch C′) Doppelpunkt von F^4_{2c} ist[1]) Dies folgt übrigens auch aus der Tatsache, dass die Schnittkurven von α und β mit F^4_{2c} nach Satz (12) je in zwei conjugiert imaginäre Kegelschnitte zerfallen, die sich in C und C′ als ihren einzigen reellen Punkten durchschneiden [2]). Also:

(*24a*). *Die* F^4_e *eines reell-imaginären Ellipsoids, dessen Halbaxenquadrate der Ungleichung* $-c^2 > -b^2 > -a^2$ *genügen, ist imaginär für alle Werte von* $e < 2c$. *Sie hat für von* 0 *an wachsende Werte von* e *zum ersten Male reelle Punkte für* $e = 2c$. *In diesem Falle hat die sonst imaginäre* F^4_{2c} *die Potenzpunkte* C *und* C′ *von* J(c) *zu reellen Doppelpunkten.*

Genügt e der Ungleichung:

$$\text{I.} \quad 2c < e < 2b$$

so erhält man in $\alpha = [b \mid c]$ sowohl als in $\beta = [a \mid c]$ als Schnittkurven mit F^4_e nach Satz (12) je zwei getrennte, völlig

[1]) Salmon-Fiedler a. a. O.

[2]) Das Criterium (A) versagt hier!

ausserhalb von einander gelegene Ovale, welche bezw. C und C′ umschliessen. Daraus ist zu folgern, dass für die vorausgesetzten Werte von e die F_e^4 aus zwei ausserhalb von einander gelegenen, ganz im Endlichen verbleibenden Ovaloiden besteht, welche die Punkte C bezw. C′ umschliessen. Nimmt e den Wert 2b an, so zerfällt die C_e^4 von $\alpha = [b \mid c]$, also die Schnittkurve von α mit F_e^4 in zwei Ellipsen, die sich in B und B′ durchschneiden: B und B′ sind Doppelpunkte dieser C_e^4. Die C_e^4 von $\gamma = [a \mid b]$ besteht nach Satz (12) aus zwei conjugiert imaginären sich in B und B′ durchschneidenden Kegelschnitten, sodass B und B′ auch Doppelpunkte der C_e^4 von γ, und folglich auch Knotenpunkte von F_{2b}^4 sind. (Auf den analytischen Beweis hierfür wird der Kürze halber verzichtet). Die F_{2b}^4 besteht nur noch aus einem einzigen Ovaloid, indem die beiden, für kleinere Werte von e erhaltenen Ovaloide für $e = 2b$ durch B und B′ in einander übergehen. Die Schnittkurve von $\beta = [a \mid c]$ besteht auch in diesem Falle aus zwei getrennten Ovalen um C und C′ herum. Die Schnittkurven der Ebenen durch b mit F_e^4 bestehen je aus zwei einander in B und B′ schneidenden Ellipsen. Die die F_{2b}^4 reell schneidenden Ebenen durch b werden von den imaginär schneidenden geschieden durch zwei Ebenen λ_1 und λ_2, welche zu einander bezüglich α (und γ) symmetrisch sind und deren jede F_{2b}^4 längs einer reellen Ellipse berührt. [Der Beweis hierfür möge kurz analytisch angedeutet werden: Wir schneiden eine beliebige Ebene λ durch b, welche gegen $\gamma = [a \mid b]$ unter dem Winkel φ geneigt ist und deren Gleichung also lautet: $z = x.\mathrm{tg}\,\varphi$, mit F_{2b}^4:

$$[x^2b^2c^2 + y^2c^2a^2 + z^2a^2b^2 + a^2b^2c^2]^2$$
$$- 4b^2[x^2b^4c^4 + y^2c^4a^4 + z^2a^4c^4] = 0.$$

Die Gleichung der Projectionskurve der Schnittkurve $(F_{2b}^4 \mid \lambda)$ in γ:

$$a)\ldots[x^2b^2(c^2 + a^2\mathrm{tg}^2\varphi) + y^2c^2a^2 + a^2b^2c^2]^2$$
$$- 4b^2[x^2b^4(c^4 + a^4\mathrm{tg}^2\varphi) + y^2c^4a^4] = 0$$

stellt, da die Schnittkurve $(F_{2b}^4 \mid \lambda)$ aus zwei reellen oder imaginären Ellipsen besteht, ebenfalls zwei reelle oder ima-

ginäre Ellipsen dar. Ist $\sphericalangle \varphi = \text{arc tg} \frac{c^2}{a^2} \cdot \sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}$, also $\text{tg}^2 \varphi = \frac{c^4}{a^4} \cdot \frac{a^2-c^2}{b^2-c^2}$, so lässt sich Gleichung a) auf die Form bringen:

$$\left[\frac{x^2}{\left(\frac{a^2}{b^2} \cdot \sqrt{\frac{a^2-c^2}{b^2-c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right]^2 = 0$$

und stellt also eine doppelt gerechnete reelle Ellipse dar. Diese ist die Projection auf γ jeder der beiden Ellipsen längs welcher die beiden, unter dem Winkel $\varphi = \text{arctg} \frac{c^2}{a^2} \cdot \sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}$ gegen $\gamma = [a \mid b]$ geneigten Ebenen λ_1 und λ_2 durch b die F^4_{2b} berühren].

Erteilt man e einen Wert, der der Ungleichung:

II. $2b < e < 2a$

genügt, so besteht die C^4_e in $\beta = [a \mid c]$ sowohl als in $\gamma = [a \mid b]$ aus zwei ausserhalb von einander gelegenen Ovalen, die in β C bezw. C′, in γ B bezw. B′ umschliessen. Hingegen wird die C^4_e von $\alpha = [b \mid c]$ gebildet von zwei ganz im Endlichen gelegenen Ovalen, von denen das eine das andere umschliesst, und welche also zusammen eine ringförmige Figur bilden. Man erkennt hieraus, dass die F^4_e für solche Werte von e zwar nicht Rotationsfläche ist, doch Aehnlichkeit mit einer ringförmigen Fläche hat und daher wohl auch als „Ring“ bezeichnet werden kann. Die C^4_e-Kurven in β und γ sind mit Meridiankurven, die C^4_e von α hingegen mit der Aequatorealkurve eines richtigen Ringes zu vergleichen.

Nähert sich e, wachsend, dem Werte 2a, so erweitert sich der Ring mehr und mehr nach A und A′, den Potenzpunkten von J(a) hin. Für $e = 2a$ besteht die C^4_e in γ sowohl als in β aus zwei Ellipsen, die sich in A und A′ schneiden (Satz (12)) und dadurch A und A′ zu Knotenpunkten von F^4_e machen. Die C^4_{2a} von α ist ringförmig, wie sie es für alle Werte $e > 2b$ ist. Die F^4_{2a} besteht also ebenfalls noch aus einem einzigen Ovaloid, das aber in A und A′

Doppelpunkte hat. Die Schnittkurven der Ebenen durch a mit F^4_{2a} bestehen je aus zwei einander in A und A′ schneidenden reellen Ellipsen.

Wächst e noch weiter, so bestehen die Schnittkurven von α, β und γ mit F^4_e je aus zwei getrennten Ovalen, die eine ringförmige Figur bilden; innerhalb des Ringes verläuft jedesmal die Schnittellipse der betreffenden Hauptebene mit $E^{2\prime}$. Die F^4_e besteht also jetzt aus zwei getrennten Ovaloiden, deren eines, O_i, innerhalb von $E^{2\prime}$ liegt, das andere, O_a, umschliesst E'^2. Die F^4_{2a} stellt den Uebergang von dieser Art F^4_e-Flächen zu den röhrenartigen Formen von F^4_e dar, so wie die F^4_{2b} den Uebergang zwischen den letzteren und denjenigen Formen von F^4_e bildet, deren beide Ovaloide einander ausschliessen. Die Gestalt der F^4_e für $e > 2a$ ist ihrer Form nach ähnlich wie die der F^4_e eines reellen Ellipsoids für alle Werte von e.

Für immer mehr wachsendes e zieht sich O_i immer mehr auf M zusammen, O_a erweitert sich immer mehr. Bei $e = \infty$ ist O_i reell in M zusammengeschrumpft, und M wird zum Doppelpunkt von K^2_i, O_a ist in ε_∞ übergegangen. (Vgl. Satz (18a) S. 58). Zusammenfassend können wir sagen:

(*24b*). *Die* F^4_e *eines reell-imaginären Ellipsoids* E^2_i, *dessen Halbaxenquadrate der Ungleichung*: $-c^2 > -b^2 > -a^2$ *genügen, besteht aus zwei Ovaloiden für alle Werte von* e, *welche die Bedingung* $2c < e < 2b$ *oder* $e > 2a$ *erfüllen. Im ersteren Falle liegen die beiden Ovaloide ausserhalb von einander und umschliessen bezw. die Potenzpunkte von* J(c), *im letzteren Falle umschliesst das eine Ovaloid das* E^2_i *conjugierte reelle Ellipsoid* $E^{2\prime}$ *und dieses das andere Ovaloid.*

Für Werte von e, *welche der Bedingung* $2b \leq e \leq 2a$ *genügen, ist die* F^4_e *eine einzige ringförmige Fläche, die in den Fällen* $e = 2b$ *und* $e = 2a$ *in den Potenzpunkten von* J(b) *bezw.* J(a) *Knotenpunkte hat.*

Schliesslich mögen noch die Fälle kurz besprochen werden, in denen der vorliegende Polarraum rotatorisch ist, wo also $E^{2\prime}$ entweder ein Rotationsellipsoid oder eine Kugel ist.

$E^{2'}$ sei zunächst rotatorisch um die a-Axe als Rotationsaxe, wo $a > c$, $c = b$. Bei von 0 an wachsenden Werten von e sind wieder zum ersten Male bei $e = 2c$ reelle e-Pole vorhanden: die Punkte des Schnittkreises $\mathfrak{K}^2_\alpha$ von $E^{2'}$ mit α. Dieser Kreis ist der reelle Durchschnitt zweier Rotationsellipsoide, also Doppelkurve der zerfallenden, bis auf diese reelle Doppelkurve völlig imaginären F^4_{2c}-Fläche. Die Gleichung derselben:

$$[x^2c^4 + y^2c^2a^2 + z^2a^2c^2 + a^2c^4]^2 - 4c^2[x^2c^8 + y^2c^4a^4 + z^2a^4c^4] = 0,$$

oder, einfacher:

$$[x^2c^2 + y^2a^2 + z^2a^2 + a^2c^2]^2 - 4c^2[x^2c^4 + y^2a^4 + z^2a^4] = 0$$

lässt sich in zwei quadratische Faktoren zerlegen, deren jeder, $= 0$ gesetzt, die Gleichung eines imaginären Rotationsellipsoides darstellt:

$$[c^2(x + i.\sqrt{a^2 - c^2})^2 + a^2y^2 + a^2z^2 - c^4].$$
$$.[c^2(x - i.\sqrt{a^2 - c^2})^2 + a^2y^2 + a^2z^2 - c^4] = 0.$$

Eür $2c < e < 2a$ ist die F^4_e eine Torusfläche mit kreisringförmigen Aequatorealschnitten. Die Schnittkurven dieses Torus mit den Ebenen durch a sind sämtlich congruent und die C^4_e-Kurven dieser Ebenen für den gegebenen Wert von e. Für $e = 2a$ besteht die C^4_e aus einer sich selbst in den Scheiteln A und A′ von $E^{2'}$ durchschneidenden Ringfläche, entstanden durch Rotation einer Ellipse um eine zu ihrer Hauptaxe parallele Axe. Schliesslich erscheinen bei Werten von $e > 2a$ wieder zwei getrennte Ovaloide, zwischen denen $E^{2'}$ verläuft, wie im allgemeinen Falle. — Ist c die Rotationsaxe von $E^{2'}$ ($a > c$), so liegen die Verhältnisse genau wie im allgemeinen Falle. Erwähnenswert ist der Fall $e = 2a$, wo der Schnittkreis von γ mit $E^{2'}$ Doppelkurve der F^4_e ist, und diese also zerfällt. Sie besteht dann aus zwei reellen Rotationsellipsoiden, die einander in dem erwähnten Schnittkreise $(E^{2'} \mid \gamma)$ durchschneiden.

In einem Polarraume dessen Basisfläche eine reell-imaginäre Kugel des Radius ri ist, ist die zu ihr conjugierte reelle Kugel, doppelt gerechnet, die F^4_e für den Wert $e = 2r$,

für welchen Wert F_e^4 bei von 0 an wachsenden Werten von e zum ersten Male reell wird. Die Verhältnisse liegen bei weiter wachsenden Werten von e ganz ähnlich wie bei der reellen Kugel. (Vgl. S. 66).

§ 7. Die F_e^4 in Polarräumen mit unendlich fernem Mittelpunkte.

Im Folgenden setzen wir nicht ausgeartete Polarräume mit unendlich fernem Mittelpunkte M_∞ voraus. Ihre Basisfläche ist stets reell, sie stellt, doppelt gerechnet, die F_e^4 für $e = 0$ dar. Der bei $e = \infty$ sich ergebende imaginäre Kegel K_i^2, der die doppelt zu rechnende ε_∞ zur F_∞^4 ergänzt, ist hier ein elliptischer Cylinder 2. Ordnung mit M_∞ als Scheitel. Er schneidet ε_∞ in den Polaren der beiden von M_∞ an $\mathfrak{K}_a^2$ gehenden Tangenten.

Der allen F_e^4-Flächen des gegebenen Paraboloids P^2 gemeinsame Doppelkegelschnitt besteht in diesem Falle aus dem reellen oder imaginären Geradenpaare (l_∞, g_∞) von P^2 in ε_∞. Da jede Ebene durch M_∞ F_e^4 in einer Kurve 4. Ordnung mit zwei in M_∞ vereinigten Doppelpunkten schneidet, (mit Ausnahme der Ebenen durch l_∞ und g_∞), also in einer Kurve, die in M_∞ eine Selbstberührung hat, so ist M_∞ auch ein Selbstberührungspunkt von F_e^4 und es ergibt sich:

(25). *Die* F_e^4 *eines Polarraumes mit unendlich fernem Mittelpunkte* M_∞ *hat in* M_∞ *eine Selbstberührung.*

Wir wollen uns noch davon überzeugen, dass die Constructionsvorschrift, die Schnittpunkte eines Durchmessers d mit F_e^4 als die ē-Punkte von J(d) zu construieren, auch für die F_e^4 eines Paraboloids gilt. Ein beliebiger endlicher Durchmesser d von P^2 hat, da M_∞ Doppelpunkt jeder F_e^4-Fläche von P^2 ist, in M_∞ zwei vereinigte Punkte mit F_e^4 gemein. Schneidet nun d P^2 in D, und ist P ein weiterer Schnittpunkt von d mit F_e^4, so geht die Polarebene π von P durch den Punkt P′ von d, der zu P bezüglich D symmetrisch ist; denn J(d) ist auf jedem endlichen Durchmesser von P^2 hyperbolisch-gleichseitig. Dass P′ auch auf F_e^4 liegt, ist

wie oben zu erkennen. Der Winkel, unter dem der Durchmesser d gegen alle zu ihm conjugierten Ebenen geneigt ist, sei φ, dann ist $PP' = \frac{e}{\sin \varphi} = \bar{e}$. P und P' bilden also das endliche $\bar{e}$-Paar von J(d) (sind daher auf jedem endlichen Durchmesser reell construierbar), das andere $\bar{e}$-Paar fällt mit M_∞ zusammen (vgl. S. 26), und in der Tat ist ja M_∞ doppelter Schnittpunkt von d mit F_e^4. Somit ist die gesuchte Bestätigung erbracht.

Für die endliche Axe c von P^3 ist $\varphi = 90^0$, $\sin \varphi = 1$, also sind die Schnittpunkte der c-Axe mit F_e^4 die e-Punkte von J(c). Dass auch im vorliegenden Polarraume die Schnittkurven der beiden durch c gehenden Hauptebenen α und β die C_e^4-Kurven der in α und β liegenden Polarfelder sind ist ohne weiteres zu erkennen.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen über die F_e^4-Flächen paraboloidischer Polarräume gehen wir über zu der

1). F_e^4 eines hyperbolischen Paraboloids.

Jede der Hauptebenen α und β des hyperbolischen Paraboloides P_h^2 schneidet dieses in einer Parabel, deren C_e^4 nach Satz (13) aus zwei Ovalen besteht, die einander in M_∞ berühren und deren eines innerhalb der Schnittparabel liegt, während das andere diese umschliesst. Die Schnittkurven von α und β mit F_e^4 sind also Kurven 4. Ordnung mit einer Selbstberührung in M_∞, gemäss Satz (25).

Jede Ebene durch g_∞ oder l_∞ schneidet F_e^4 ausser in g_∞ bezw. l_∞ in einem Kegelschnitte. Wir betrachten etwa die Ebene σ durch l_∞. Sie schneidet P_h^2 noch in einer Geraden g, die ihrerseits wieder den Restkegelschnitt imaginär (in Punkten von $\overset{i}{r_I^4}$) schneidet. Die Schnittpunkte P, P' jedes g schneidenden Durchmessers liegen nun auf verschiedenen Seiten von g, also wird der Restkegelschnitt in $[g \mid l_\infty]$ aus zwei getrennten Teilen bestehen, die zu beiden Seiten von g liegen: Er ist also eine Hyperbel $\mathfrak{H}^2$:

(26). *Die* F_e^4 *eines hyperbolischen Paraboloids enthält für jeden Wert von* e *zwei Scharen von reellen Hyperbeln, deren Trägerebenen durch* g_∞ *bezw.* l_∞ *gehen.*

Da die Schnittpunkte P, P′ jedes g schneidenden Durchmessers mit $\mathfrak{H}^2$ zu g (schief-) symmetrisch sind, so folgt, dass g ein Durchmesser von $\mathfrak{H}^2$, und M_∞ sein Pol bezüglich $\mathfrak{H}^2$ ist. Die Schnittpunkte von $\mathfrak{H}^2$ mit l_∞, dreifache Punkte der Schnittkurve von $[g \mid l_\infty]$ mit F_e^4, sind die Berührungspunkte S′ bezw. S'_1 der beiden Ebeneu σ′ bezw. σ'_1, die zu $\sigma \equiv [g \mid l_\infty]$ im Abstande e parallel laufen mit P_h^2. Es ist also $(S'S'_1 G_\infty M_\infty) = -1$. In der Tat bilden ja auch die Polarebenen $\sigma', \sigma'_1, \sigma, \varepsilon_\infty$ der Punkte $S', S'_1, G_\infty; M_\infty$ ein harmonisches Büschel um l_∞ als Axe.

Sind g_0 und l_0 die beiden Erzeugenden von P_h^2, deren Ebene $[g_0 \mid l_0]$ die Berührungsebene im Scheitel S von P_h^2 ist, so sind c und g_0 bezw. c und l_0 die Axen, S der Mittelpunkt der Resthyperbeln in $[g_0 \mid l_\infty]$ bezw. $[l_0 \mid g_\infty]$.

Jede Ebene δ durch c schneidet P_h^2 in einer Parabel, ihre Schnittkurve mit F_e^4 wird also — wie man mit Hilfe der Constructionsvorschrift erkennt —, ohne die C_e^4 des Polarfeldes (δ) zu sein, aus zwei Ovalen bestehen, die einander, entsprechend Satz (25) S. 86, in M_∞ berühren, und von denen das eine innerhalb der Schnittparabel $(P_h^2 \mid \delta)$ liegt, während das andere diese umschliesst. Beide Ovale haben parabelartige Gestalt. Nimmt man noch hinzu, dass die Schnittparabel einer Ebene δ durch c und folglich auch die parabelartigen Ovale ihrer Schnittkurve mit F_e^4 nach der einen oder der anderen Seite von c geöffnet sind, je nachdem δ innerhalb des spitzen oder des stumpfen von $[g_0 \mid l_\infty]$ und $[l_0 \mid g_\infty]$ gebildeten Flächenwinkels verläuft, so erkennt man, dass die F_e^4 von P_h^2 aus zwei Schalen besteht, deren jede l_∞ und g_∞ enthält und ihrer Gestalt nach den Charakter eines hyperbolischen Paraboloides trägt. Zwischen den beiden Schalen verläuft P_h^2.

Bei immer mehr abnehmendem e nähern sich die beiden Schalen von entgegengesetzten Seiten dem P_h^2, um für $e = 0$

in P_h^2 hineinzufallen. Für wachsendes e weichen die beiden Schalen immer weiter auseinander, verflachen sich immer mehr und gehen für $e = \infty$ in ε_∞ über.

2.). Die F_e^4 eines elliptischen Paraboloides.

Auch beim elliptischen Paraboloide, P_e^2, gewinnt man am einfachsten eine Vorstellung von der Gestalt der F_e^4 desselben, wenn man die Schnittkurven in den Ebenen δ durch die endliche Axe c betrachtet. Jede Ebene δ schneidet P_e^2 in einer Parabel $\mathfrak{P}^2$: die Schnittkurve von δ mit F_e^4 wird also aus zwei Ovalen bestehen, die einander in M_∞ berühren und von denen eines innerhalb von $\mathfrak{P}^2$ liegt, während das andere $\mathfrak{P}^2$ umschliesst. Diese beiden Ovale bilden in α und β die C_c^4-Kurven der in α und β liegenden Polarfelder. Da alle Schnittparabeln $\mathfrak{P}^2$ der Ebene δ nach derselben Seite von c geöffnet sind, so folgt, dass die F_e^4 aus zwei Ovaloiden, O_a und O_i, besteht, die einander und P_e^2 in M_∞ berühren. O_i liegt innerhalb von P_e^2, O_a umschliesst P_e^2.

Die F_e^4 von P_e^2 erinnert an die F_e^4 des reellen Ellipsoids: So wie aus diesem P_e^2 dadurch gewonnen werden kann, dass das Ellipsoid, an einem beliebigen Scheitelpunkte festgehalten, in Richtung der durch diesen Scheitelpunkt gehenden Hauptaxe bis zur ε_∞ hin erweitert gedacht wird, so erscheinen die Ovaloide O_a und O_i als Erweiterungen der beim Ellipsoide erhaltenen Ovaloide bis zur ε_∞ hin. Die Selbstberührung in M_∞ erscheint damit auch anschaulich als etwas zu Erwartendes.

§ 8. Eine quadratische Nullverwandtschaft im Raume.

Die F_e^4 und die Φ_e^{IV} eines Polarraumes sind ihrer Definition nach polare Flächen des Polarraumes. Doch lässt sich noch eine höhere reciproke Verwandtschaft construieren, in welcher sie ebenfalls entsprechende Flächen sind. Zu dieser Verwandtschaft werden wir in folgender Weise geführt: Es hat sich oben ergeben, dass, wenn man die Schnittpunkte P, P′, P_1, P'_1 eines beliebigen Durchmessers d mit F_e^4 mit der Polare d'_∞ von d durch die Ebenen bezw. π', π, π'_1, π_1 ver-

bindet, diese Ebenen, die von d'_∞ aus an Φ_e^{IV} gehenden Tangentialebenen sind. Man kann also aus einem beliebig gegebenen Punkte P von F_e^4 eine ganz bestimmte, mit P incidente Tangentialebene π' von Φ_e^{IV} gewinnen, indem man P mit der Polare d'_∞ des Durchmessers PM = d durch die Ebene π' verbindet. Und dual kann mittels einer beliebigen Tangentialebene π von Φ_e^{IV} ein ganz bestimmter, in π gelegener Punkt P' von F_e^4 gefunden werden; ist nämlich d'_∞ die unendlich ferne Gerade von π, so bohrt der zu d'_∞ polare Durchmesser d den Punkt P' in π ein.

P' ist der Mittelpunkt des in π gelegenen Polarfeldes, π' ist die dem Durchmesser PM im Polarbündel P polare Ebene durch P.

Ordnen wir nun allgemein jeder Ebene ξ des Polarraumes den Mittelpunkt X' des in ihr gelegenen Polarfeldes und somit auch jedem Punkte X die durch ihn gehende, dem Durchmesser XM conjugierte Ebene ξ' zu, so erhalten wir eine involutorische reciproke Raumverwandtschaft, welche wegen der durchgängigen Incidenz entsprechender Elemente eine eineindeutige Nullverwandtschaft darstellt[1]). Sie ist in beiderlei Sinne quadratisch und werde mit $\mathfrak{N}^2$ bezeichnet. Späterer Anwendungen wegen wollen wir die Hauptelemente von $\mathfrak{N}^2$ zusammenstellen. Sie sind

1.) der Mittelpunkt M, der jede Durchmesserebene zur Nullebene hat, und dual die ε_∞, für welche jeder ihrer Punkte Nullpunkt ist;

2.) der unendlich ferne Kegelschnitt $\mathfrak{K}^2_\infty$, von welchem jeder Punkt S_∞ ∞^1 Nullebenen hat: die zu der in S_∞ die F^2 berührenden Asymptotenebene σ parallelen Ebenen; und dual der Kegel der Asymptotenebenen. Eine beliebige Asymptotenebene σ, welche den Asymptotenkegel längs der durch M gehenden Asymptote s berührt, hat jeden Punkt von s zum Nullpunkte[2]).

---

[1]) Ueber diese Verwandtschaft vgl.: R. Sturm, die Lehre von den geometr. Verwandtschaften, Bd. IV, art. 979, auch: R. Sturm, Liniengeometrie I, S. 78 No 1), sowie: Timerding, Annali di Matematica Ser. III, Bd. II, S. 239.

[2]) Vgl. am zuerst angeführten Orte.

In dieser räumlichen quadratischen Nullverwandtschaft sind nun ersichtlich F_e^4 und Φ_e^{IV} entsprechende Flächen. Da $\mathfrak{N}^2$ quadratisch und F_e^4 eine Fläche 4. Ordnung ist, so erwarten wir eigentlich als ihr entsprechende eine Fläche 8. Klasse. Nun hat aber F_e^4 die Hauptkurve $\mathfrak{K}_\infty^2$ von $\mathfrak{N}^2$ zur Doppelkurve, also entspricht ihr in der Tat eine Fläche 4. Klasse, eben die Φ_e^{IV}, indem sich ergänzend als uneigentlich entsprechendes Gebilde der doppelt zu rechnende Ebenenbündel 2. Klasse absondert, der durch die Tangentialebenen des als ausgeartete F^2 zu denkenden $\mathfrak{K}_\infty^2$ gebildet wird. Analog ist der Uebergang von Φ_e^{IV} zu F_e^4. Also:

(27). F_e^4 *und* Φ_e^{IV} *sind sowohl polar im Polarraume als nullverwandt im Nullsystem* $\mathfrak{N}^2$.

Unter anderem erkennt man, dass die Basisfläche des Polarraumes als Punktfläche sowohl durch die Polarität als durch die Nullverwandtschaft in die Tangentenebenenfläche übergeführt wird. Und dual.

Die räumliche Verwandtschaft $\mathfrak{N}^2$ schneidet in die Polarfelder, welche in den drei Hauptebenen α, β, γ liegen, eine ebene quadratische Nullverwandtschaft ein, in der jedem Punkte X die durch ihn gehende Gerade x′, welche dem Durchmesser XM conjugiert ist, jedem Strahle x der Centralpunkt X′ der Involution J(x) entspricht. In dieser Verwandtschaft sind die C_e^4 und die K_e^{IV} des Polarfeldes entsprechende Kurven.

In $\mathfrak{N}^2$ ist jeder Strahl des Raumes Nullstrahl einer einzigen durch ihn gehenden Ebene und eines einzigen auf ihm gelegenen Punktes, der der Nullpunkt jener Ebene ist[1]). Also erfüllen die Nullstrahlen von $\mathfrak{N}^2$ einfach den ganzen Strahlenraum. Die Nullstrahlen der Punktn von F_e^4 oder, was nach Satz (27) dasselbe ist, der Tangentialebenen von Φ_e^{IV}, oder überhaupt die Nullstrahlen der Punkte oder Ebenen einer beliebigen Ordnungs- oder Klassenfläche in $\mathfrak{N}^2$ werden

---

1) ebenda: $\gamma = 1$, wo γ die Zahl ist, welche angibt, wie oft eine beliebige Gerade eines höheren Nullsystems mit einem Punkte und einer von seinen Nullebenen incidiert.

einen Complex bilden. Beispielsweise bilden die Nullstrahlen der Punkte der Basisfläche des Polarraumes den Tangentencomplex desselben.

IV. Kapitel.

Der Complex der e-Polaren eines Polarraumes.

§ 1. Als eine e-Polare eines Polarraumes bezeichnen wir eine Gerade, die von ihrer Polare den gegebenen Abstand e hat, (der Begriff „Abstand“ im Sinne von Def. IIIa,c S. 17, 21 verstanden.).

Scheidet man aus dem Strahlenraume des Polarraumes alle e-Polaren oder alle Polarenpaare des Abstandes e aus, so erhält man einen Strahlencomplex, da gemäss Satz (X), S. 23 die Bedingung, dass der Abstand eines Geradenpaars = e sei, eine einfache ist. Wir wollen diesen Complex den e-Polaren-Complex des Polarraumes nennen und ihn mit E bezeichnen. Er ist in sich involutorisch, d. h. involutorisch auf sich selber abgebildet, da zwei Polaren im Polarraume involutorisch auf einander bezogen sind.

Der Grad von E ist gleich der Anzahl der Strahlen, die der Complex in einen beliebigen Strahlenbüschel wirft. Sei P ein beliebiger Punkt, ε eine beliebige Ebene durch ihn. Die Polaren der Strahlen des Strahlenbüschels (P,ε) bilden bekanntlich wieder einen Strahlenbüschel, dessen Scheitel der Pol E von ε, dessen Trägerebene die Polarebene π von P ist. Die Strahlen von (P,ε) und (E,π) sind projectiv auf einander bezogen. Wir stellen folgende Correspondenz in (P,ε) her: Einem beliebigen Strahle m von (P,ε) entspricht in (E,π) seine Polare m′. Wir ordnen dem Strahle m die ((P,ε) angehörigen) Polaren m_1 und m_2 der beiden Strahlen m'_1 bezw. m'_2 zu, die der Complex $[m]^2_e$ (S. 21) in (E,π) wirft. Im anderen Sinne sind dann m die Strahlen m_1 und m_2 zugeordnet, die der Complex $[m']^2_e$ in (P,ε) wirft. Damit ist in (P,ε) eine Correspondenz $[2,2]$ festgelegt, die wir mit V (P,ε) bezeichnen wollen. Ihre 4 Coincidenzstrahlen $e_1 .. e_4$ sind

nach der Definition der Correspondenz Strahlen, welche von ihren Polaren $e'_1 .. e'_4$ in (E,π) den Abstand e haben, also die e-Polaren von (P,ε). Und die Strahlen $e'_1 .. e'_4$ sind die e-Polaren von (E,π). Dies gibt den Satz:

(28). Die e-Polaren eines Polarraumes bilden einen Complex vierten Grades E^4.

Zu diesem Ergebnisse gelangen wir auch auf folgendem Wege, indem wir jetzt die engere Abstandsdefinition III, S. 17 zu Grunde legen: Wir legen durch P zu jedem Strahle des Strahlenbüschels (E,π) den parallelen Strahl. Alle diese Strahlen liegen in der durch P zu π parallelen Ebene π' und bilden den Strahlenbüschel (P,π'). Die Strahlenbüschel (P,ε) und (P,π') sind in allgemeiner Projectivität, und die Verbindungsebenen entsprechender Strahlen derselben umhüllen folglich einen Kegel 2. Klasse K^2_P. Analog erhalten wir im Punkte E durch die projectiven Strahlenbüschel (E,π) und (E,ε'), $(\varepsilon' \parallel \varepsilon)$, einen Kegel K^2_E. Ist m ein Strahl von (P,ε), m' der ihm in (E,π) entsprechende, und sind m' und $\mathfrak{m}$ die Parallelstrahlen durch P bezw. E zu m' bezw. m, so können wir die Ebenen $[m \mid m']$ und $[m' \mid \mathfrak{m}]$, von denen die erstere K^2_P, die letztere K^2_E tangiert, einander zuordnen. Sie sind parallel. Damit sind K^2_P und K^2_E projectiv auf einander bezogen, indem beide Kegel zu einem gewissen unendlich fernen Strahlenbüschel 2. Klasse perspectiv sind. Haben zwei entsprechende Ebenen, welche ja das Parallelebenenpaar eines Paares Polaren von (P,ε) und (E,π) darstellen, den Abstand e, so schneiden sie (P,ε) und (E,π) in e-Polaren. Es gilt also, die Anzahl der Paare paralleler Ebenen des Abstandes e in K^2_P und K^2_E zu bestimmen. Sei λ eine Ebene von K^2_P, die von ihrer entsprechenden Ebene λ' durch E den Abstand e hat. Wir fällen von E auf λ das Lot EF, wo also $EF = e$ ist. λ ist gegen PE um einen Winkel ψ geneigt, für den die Gleichung gilt: $\sin \psi = \frac{e}{PE}$. Demnach ist λ Tangentialebene des Rotationskegels, dessen Axe PE, dessen Spitze P und dessen Oeffnungswinkel $2\psi = 2 \arcsin \frac{e}{PE}$ ist. Dieser

Rotationskegel hat mit K_P^2 vier Ebenen gemein, die mit ihren Parallelebenen durch E in die Strahlenbüschel (P,ε) und (E,π) vier e-Polarenpaare einschneiden. Damit ist Satz (28) von neuem bewiesen.

§ 2. Die Doppelstrahlen von E^4.

Jedem Paare paralleler Polaren t, t′ kommt gemäss Satz (VIII), S. 20 jeder beliebige Abstand e zu. Also gehören parallele Polarenpaare allen e-Polaren-Complexen des Polarraumes an, welchen Wert auch e hat, einschliesslich der extremen Werte $e = 0$ und $e = \infty$. Zwei parallele Polaren aber sind, als einander schneidende Polaren, Tangenten der F^2 des Polarraumes in einem unendlich fernen Punkte derselben, also Asymptoten des Polarraumes. Somit gilt:

(*29*). *Die Congruenz* (*2,2*) *der Asymptoten der* F^2 *eines Polarraumes ist allen* e*-Polaren-Complexen des Polarraumes gemein, welcher Wert auch* e *erteilt wird.*

Zur Asymptotencongruenz gehören auch die Geraden der beiden Regelscharen, deren Trägerfläche die F^2 ist, und die Tangenten von $\mathfrak{K}^2_\infty$. Ihre Zugehörigkeit zu E^4 wird im Besonderen gesichert durch Satz (VIIIe) bezw. Satz (VIIIa). Bei den in ε_∞ gelegenen Asymptoten eines Paraboloids treten die Sätze (VIIIb) und (VIIIc) in Kraft.

Die Asymptotencongruenz (2,2) ist das Strahlengebilde, welchem im Punktraume des Polarraumes $\mathfrak{K}^2_\infty$ correspondiert. Da $\mathfrak{K}^2_\infty$ sich als Doppelkurve sämtlicher F^4_e-Flächen erwiesen hat, so liegt der Gedanke nahe, dass sich die Asymptotencongruenz auch als Doppelstrahlencongruenz jedes E^4 herausstellen wird.

Um die Duplicität einer beliebigen Asymptote t in einem beliebigen e-Polaren-Complexe nachzuweisen, fassen wir einen Strahlenbüschel auf, der t enthält, etwa den Strahlenbüschel (P,ε), und wenden Criterium (A) (S. 29) auf die in (P,ε) festgelegte Verwandtschaft [2,2]: V (P,ε) und den Strahl t an. Wir suchen zunächst die t in V(P,ε) im einen Sinne entsprechenden Strahlen t_1 und t_2 auf: Der Tangentencomplex $[t]^2_e$ schneidet den zu (P,ε) polaren Strahlenbüschel

(E,π) in der zu t polaren Asymptote t′, welche, als zu t parallel, Doppelstrahl von $[t]_e^2$ ist. (Vgl. S. 21). Folglich fällt t mit t_1 und t_2 zusammen. Die t im andern Sinne in $V(P,\varepsilon)$ entsprechenden Strahlen t_1 und t_2 sind die Schnittstrahlen des Complexes $[t']_e^2$ mit (P,ε), fallen also, da t, als zu t′ parallel, Doppelstrahl von $[t']_e^2$ ist, ebenfalls mit t zusammen. Also ist t gemäss dem Criterium (A) doppelte Coincidenz von $V(P,\varepsilon)$, und da dies für jeden Strahlenbüschel gilt, in dem t liegt, so ist t Doppelstrahl von E^4. Also:

(*30*). *Die Asymptoten der Basisfläche* F^2 *eines Polarraumes sind Doppelstrahlen jedes* e-*Polaren-Complexes des Polarraumes.*

§ 3. Der e-Polaren-Complex für $e = 0$ und $e = \infty$.

1). $e = 0$

Zwei Polaren p, p' eines Polarraumes, deren Abstand 0 ist, schneiden einander, und zwei sich schneidende Polaren sind bekanntlich stets Tangenten der F^2 des Polarraumes. Solche Polaren sind reell vorhanden nur in Polarräumen mit reeller Basisfläche. Der Complex dieser Nullpolaren, wie man sie des Parameters $e = 0$ wegen nennen kann, ist identisch mit dem Tangentencomplex der Basisfläche des Polarraumes. Dieser Complex ist quadratisch und ist also als Nullpolarencomplex doppelt zu rechnen. Dem Tangentencomplexe gehören auch die beiden (reellen oder imaginären) verbundenen Regelschaaren der F^2 an, sowie auch die Congruenz (2,2) der Asymptoten, wodurch sich Satz (29) und (30) für $e = 0$ bestätigt. Demnach gilt in voller Allgemeinheit der Satz:

(*31*). *Der Nullpolaren-Complex eines Polarraumes ist der doppelt gerechnete Tangentencomplex der Basisfläche des Polarraumes.*

In einem Polarraume mit reell-imaginärer Basisfläche ist der Complex der Nullpolaren völlig imaginär. Für von 0 an wachsende Werte von e wird es einen Wert von e geben, für den der e-Polaren-Complex zum ersten Male reelle Strahlen enthält. Dieser Wert wird weiter unten (§ 8) bestimmt werden.

2.) $e = \infty$.

Haben zwei Polaren ∞ grossen Abstand, so genügen sie der in Def. IV, S. 22 liegenden Bedingung: sie schneiden beide dieselbe Tangente der absoluten Kurve. Mit dieser Definition der ∞-Polaren haben wir also zu arbeiten. Den Grad des durch diese Definition bestimmten Complexes stellen wir wie folgt fest: Wir betrachten die beiden polaren Strahlenbüschel (P,ε) und (E,π); sie schneiden in ε_∞ zwei projective Punktreihen ein. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte derselben umhüllen einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^2$, (die in ε_∞ liegende Complexknrve des teträedralen Complexes, der durch die Treffstrahlen entsprechender Strahlen der beiden projectiven Strahlenbüschel (P,ε) und (E,π) gebildet wird). Die Tangenten dieses Kegelschnitts sind unendlich ferne Gerade, welche entsprechende, also polare Strahlen von (P,ε) und (E,π) treffen; die 4 Tangenten, welche $\mathfrak{K}^2$ mit $\mathfrak{K}_a^2$ gemein hat, liefern also in (P,ε) und (E,π) je 4 Gerade, welche mit ihren Polaren dieselbe Tangente von $\mathfrak{K}_a^2$ schneiden. Somit ist bestätigt, dass auch der ∞-Polaren-Complex ein Complex vierten Grades ist.

Es seien nun p und p′ irgend ein ∞-Polarenpaar; die Tangente von $\mathfrak{K}_a^2$, welche beide treffen, sei t'_∞. Da zwei Polaren, welche eine Gerade schneiden auch von der Polare dieser Geraden getroffen werden, so schneiden p und p′ auch den zu t'_∞ polaren Durchmesser t, der eine Kante von K_i^2 ist. Die Kanten von K_i^2 sind auf die Tangenten von $\mathfrak{K}_a^2$ projectiv bezogen, d. h. K_i^2 und $\mathfrak{K}_a^2$ bilden zwei (ausgeartete) projectiv auf einander bezogene Regelschaaren. Wir fanden, dass jede ∞-Polare zwei entsprechende Erzeugende der beiden Regelscharen schneidet. Auch umgekehrt gilt, dass jeder Treffstrahl p entsprechender Erzeugenden t und t'_∞ von K_i^2 bezw. $\mathfrak{K}_a^2$ eine ∞-Polare ist: denn, wenn p dem Strahlennetze $[tt'_\infty]$ angehört, so gilt das auch von ihrer Polaren p′, p und p′ schneiden also dieselbe Tangente t'_∞ von $\mathfrak{K}_a^2$ und sind folglich ∞-Polaren. Somit gilt der Satz:

(32). Die ∞-Polaren eines Polarraumes bilden den Complex der Treffstrahlen entsprechender Strahlen zweier pro-

jectiv auf einander bezogenen Regelscharen, nämlich der Tangenten der absoluten Kurve und ihrer Polaren, welche die Kanten des Kegels K_i^2 *bilden.*

Da die Treffstrahlen entsprechender Strahlen zweier projectiv auf einander bezogenen Regelscharen einen Complex 4. Grades bilden[1]), so ist der Grad „4“ des ∞-Polaren-Complexes durch diesen Satz von neuem bestätigt. Der Satz zeigt ferner, dass der ∞-Polaren-Complex ∞^1 Strahlennetze enthält, deren jedes zu Leitgeraden eine Tangente von $\mathfrak{K}_a^2$ und die zu ihr polare Kante von K_i^2 hat.

Zu dem ∞-Polaren Complexe F_∞^4 gehören ersichtlich sämtliche Durchmesser und ihre Polaren, die Geraden von ε_∞, und, gemäss Satz (29) S. 94, die Asymptoten. Jeder Durchmesser d und folglich auch jede unendlich ferne Gerade sowie jede Asymptote genügen der in Def. IV. S. 22 liegenden Bedingung zweimal und treffen somit auch je zwei Paare entsprechender Strahlen von $\mathfrak{K}_a^2$ und K_i^2. Infolgedessen zählen sie in jedem Strahlenbüschel, dem sie angehören, doppelt als ∞-Polaren und sind also Doppelstrahlen von F_∞^4. Dies gibt den Satz:

(33). *Der ∞-Polaren Complex eines Polarraumes hat eine Congruenz (3,3) von Doppelstrahlen, welche aus der Asymptotencongruenz (2,2) und dem Durchmesserbündel nebst den Geraden der unendlich fernen Ebene besteht.*

§ 4. F^4 als Complex der Nullstrahlen von F_e^4 oder Φ_e^{IV}.

p und p′ seien ein paar reciproker e-Polaren. Wir legen durch sie ihre beiden Parallelebenen $\varkappa$ und $\varkappa'$, wo $\varkappa$ durch p, $\varkappa'$ durch p′ geht. Der Abstand beider Ebenen misst den Abstand von p und p′, ist also = e. $\varkappa$ und $\varkappa'$ sind, als durch zwei Polaren gehend, conjugiert. Dasselbe gilt von ihren Polen K und K′. Der Pol K von $\varkappa$ liegt auf p′, der Pol K′ von $\varkappa'$ auf p. K und K′ haben also von ihren Polarebenen

[1]) Kliem, Ueber Oerter von Treffgeraden entsprechender Strahlen in eindeutig und linear verwandten Strahlengebilden erster bis vierter Stufe. S. 8. Dissertation, Breslau 1909.

den Abstand e und sind mithin e-Punkte, $\varkappa$ und $\varkappa'$ sind infolgedessen e-Ebenen. Da $\varkappa$ und $\varkappa'$ durch die Verbindungslinie der beiden unendlich fernen Punkte P_∞ und P'_∞ von p bezw. p′ gehen, so liegen ihre Pole auf der Polaren der Geraden $P_\infty P'_\infty$, also auf dem Durchmesser, der zugleich p und p′ schneidet. Es folgt:

(*34*). *Ein* e-*Polarenpaar bestimmt eindeutig ein Paar conjugierter* e-*Punkte und* e-*Ebenen.*

Erstere sind zu construieren als Schnittpunkte des von M aus an das Strahlennetz [pp′] gehenden Treffstrahles mit p und p′, letztere sind als die durch p und p′ gehenden Parallelebenen zu gewinnen.

Man erkennt, dass K′ der Nullpunkt von $\varkappa$, K der Nullpunkt von $\varkappa'$ in $\mathfrak{R}^2$ ist. Folglich bestimmt jede e-Polare p eindeutig ein mit ihr incidentes Paar nullverwandter Elemente, welche als Nullebene $\varkappa$ bezw. als Nullpunkt K′ von p bezeichnet werden können. p ist Nullstrahl von $\varkappa$ sowohl als von K′. Nun ist K′ ein Punkt von F_e^4, $\varkappa$ eine Tangentialebene von Φ_e^{IV}, also ergibt sich:

(*35*). *Jeder Strahl von* E^4 *ist Nullstrahl eines Punktes von* F_e^4 *oder einer Ebene von* Φ_e^{IV}.

Können wir nun noch beweisen, dass auch umgekehrt jeder Nullstrahl eines Punktes von F_e^4 eine e-Polare ist, so ist damit die Identität des e-Polaren-Complexes mit dem Complex der Nullstrahlen der Punkte von F_e^4 bewiesen. Wir betrachten ein beliebiges Punktepaar P und P′ von F_e^4, wo also P und P′ auf demselben Durchmesser d liegen und in J(d) gepaart sind. Die Nullebenen von P ued P′ in $\mathfrak{R}^2$, π' bezw. π, sind bezw. die Polarebenen von P′ und P, sie sind parallel im Abstande e, jede von ihnen ist Tangentialebene an Φ_e^{IV}. (P,π') und (P',π) sind polare Strahlenbüschel. Für jedes Polarenpaar aus (P,π') und $(P'\pi)$ sind π' und π die oben $\varkappa'$ und $\varkappa$ genannten Parallelebenen, deren Abstand den Abstand des Polarenpaares misst. Da nun π' und π den Abstand e haben, so sind alle Strahlen von (P,π') und (P',π), d. h. alle Nullstrahlen der Punkte P und P′ von F_e^4 e-Polaren, und wir gewinnen den fundamentalen Satz:

(36). *Der* e-*Polaren-Complex des Polarraumes ist identisch mit dem Complex der Nullstrahlen der Punkte seiner* F_e^4-*Fläche oder der Ebenen seiner* Φ_e^{IV}-*Fläche.*

Damit ist zugleich der Grad des Complexes bestimmt, den die Nullstrahlen der Punkte einer F_e^4-Fläche bilden, er ist eben $= 4$.

Dieser Satz (36) gibt ein übersichtliches Bild des e-Polaren-Complexes und eine einfache Construktion desselben. Alle wichtigen Eigenschaften von E^4 können aus ihm hergeleitet werden. So folgt zunächst der bemerkenswerte Satz:

(37). *Der* e-*Polaren-Complex wird von* ∞^2 *Strahlenbüscheln erfüllt. Diese sind die Nullstrahlenbüschel der Punkte von* F_e^4 *oder der Tangentialebenen von* Φ_e^{IV} [1]).

Um die Complexkurve einer beliebigen Ebene π zu construieren, hat man nur π mit F_e^4 zu schneiden, dann wird die Complexkurve (π^4) gebildet durch die Strahlen, in denen π von den Nullebenen der Punkte der Schnittkurve $(\pi \mid F_e^4)$ geschnitten wird. Dual: Um den Complexkegel (P^4), der von einem beliebigen Punkte P an E^4 geht, zu bilden, legt man von P aus den Tangentialkegel an Φ_e^{IV} und verbindet die Nullpunkte aller Ebenen desselben mit P. Diese Verbindungslinien bilden (P^4). —

Wendet man den Satz (36) auf den Fall $e = 0$ an, so wird nunmehr völlig klar und zwingend, dass der Tangentencomplex der Basisfläche des Polarraumes als Nullpolarencomplex doppelt zu rechnen ist. Denn wir fanden, dass die F^2 eines Polarraumes doppelt gerechnet und als Punktfläche aufgefasst die F_0^4, als Ebenenfläche aufgefasst und ebenfalls doppelt gerechnet die Φ_0^{IV} darstellt. Also ist der Nullstrahlenbüschel jedes Punktes von F^2 doppelt zu rechnen, und ebenso der Nullstrahlenbüschel jeder Tangentialebene von F^2. Und da zudem in diesem einzigen Falle die Φ_e^{IV} zugleich die

[1]) Der allgemeine Complex 4. Grades hat (vgl. Schubert, Calcül der abzählenden Geometrie S. 272) nur eine endliche Anzahl von Strahlenbüscheln, nämlich 1280. Der e-Polaren-Complex eines Polarraumes ist also durch das Vorhandensein von ∞^2 Strahlenbüscheln sehr specialisiert.

Tangentialebenenfläche der F_e^4 ist, so sind die Nullpolaren, d. h. gemäss Satz (36) die Nullstrahlen der Punkte der F_0^4 zugleich deren Tangenten an $F_0^4 \equiv F^2$.

Wir wollen ferner noch zeigen, dass der Complex der Nullstrahlen der Punkte von F_∞^4, welche aus K_i^2 und der doppelt gerechneten ε_∞ besteht, identisch ist mit dem oben gefundenen E_∞^4. Es sei J ein beliebiger Punkt von K_i^2; seine Nullebene ι' geht durch die Tangente t'_∞ von $\mathfrak{K}_a^2$, welche der Kante $JM = t$ von K_i^2 polar ist. Nach Satz (36) muss jeder Strahl l des Strahlenbüschels (J,ι') eine ∞-Polare sein; und das ist in der Tat der Fall, denn l schneidet ja die beiden entsprechenden Strahlen t und t'_∞ der beiden (ausgearteten) projectiv auf einander bezogenen Regelscharen K_i^2 und $\mathfrak{K}_a^2$. (Vgl. Satz (32) S. 96). — Da jeder Punkt P_∞ von ε_∞ Doppelpunkt von F_∞^4, andererseits ε_∞ Nullebene jedes ihrer Punkte ist (vgl. S. 90), so ist jeder Strahlenbüschel $(P_\infty, \varepsilon_\infty)$ als Nullstrahlenbüschel eines Punktes von F_∞^4 doppelt zu rechnen, d. h.: die ∞ fernen Geraden sind Doppelstrahlen von E_∞^4, was wir bereits oben fanden, und also sind auch die Durchmesser Doppelstrahlen von E_∞^4. (Vgl. Satz (33) S. 97).

§ 5. Asymptoten, Asymptotenebenen und Punkte von $\mathfrak{K}_\infty^2$ als Nullelemente in $\mathfrak{R}^2$.

Eine beliebige e-Polare p schneidet F_e^4 in vier (reellen oder imaginären) Punkten K′, P_1, P_2, P_3. Aber sie ist im allgemeinen nur für einen einzigen unter ihnen Nullstrahl, nämlich für ihren Nullpunkt K′ [1]). Ist λ eine beliebige Ebene durch p, so wird nur die Nullebene $\varkappa$ von K′ durch p gehen, die Nullebenen von P_1, P_2, P_3 werden in λ andere Strahlen einschneiden, d. h. p ist einfache Tangente der Complexkurve (λ^4). Dual gilt Entsprechendes.

Eine e-Polare l kann demnach nur dann Doppelstrahl von E^4 sein, wenn sie zwei ihrer Schnittpunkte mit F_e^4 zu Nullpunkten hat. Denn dann gehen deren Nullebenen durch l

[1]) Man vergleiche die auf S. 93 gegebene Definition des Nullpunktes und der Nullebene einer e-Polare.

und machen l in jeder durch l gehenden Ebene λ zur Doppeltangente von (λ^4); und dual.

Eine endliche Asymptote t des Polarraumes ist in $\mathfrak{R}^2$ für jeden ihrer Punkte Nullstrahl, also auch für ihre beiden endlichen Schnittpunkte T und T_1 mit F_e^4: und diese beiden Punkte sind, sofern t als e-Polare aufgefasst wird, als ihre Nullpunkte anzusehen: Nach obigem muss ja t als doppelte e-Polare (Satz (30) S. 95) zwei Nullpunkte haben. Daraus geht zugleich hervor, dass der doppelt zu rechnende ∞ ferne Schnittpunkt S_∞ von t mit F_e^4 nicht Nullpunkt von t — als e-Polare — ist. Denn sonst wäre, entgegen Satz (30) S. 95, die Vielfachheit von t in $E^4 > 2$.

Wie sich also gezeigt hat, dass jede Asymptote als Doppelstrahl von E^4 zwei Nullpunkte hat, so lässt sich umgekehrt auf Grund der Tatsache, dass jeder Doppelstrahl von E^4 notwendig zwei seiner Schnittpunkte mit F_e^4 zu Nullpunkten haben muss, beweisen, dass im allgemeinen e-Polaren-Complexe jeder Doppelstrahl eine Asymptote sein muss. Denn gesetzt l sei ein Doppelstrahl von E^4, habe also zwei seiner Schnittpunkte mit F_e^4, L und L_1, zu Nullpunkten, d. h. die Nullebenen λ′ und λ'_1 von L bezw. L_1 gehen durch l. Da die Polarebenen λ bezw. λ_1 von L bezw. L_1, welche sich in der Polaren l′ von l schneiden, zu λ′ bezw. λ'_1 parallel laufen, so ist auch ihre Schnittlinie $(\lambda\lambda_1) = l'$ parallel sowohl zu λ′ als zu λ'_1, d. h. auch parallel zu $(\lambda'\lambda'_1) = l$. Somit sind l und l′ parallele Polaren, d. h. der Doppelstrahl l ist eine Asymptote. W. z. b. w. Daraus folgt der den Satz (30) vervollständigende Satz:

(*38*). *Der* e-*Polaren-Complex eines Polarraumes hat eine Congruenz* (2,2) *von Doppelstrahlen, die Congruenz der Asymptoten des Polarraumes.*

(In gewissen speciellen e-Polaren-Complexen sind allerdings auch noch andere Strahlen Doppelstrahlen. Vgl. Kap. IV. § 8).

Aus Satz (38) geht unmittelbar der folgende hervor:

(*39*). *Die Complexkegel von* E^4 *sind Kegel vierter Ordnug mit zwei Doppelkanten, die Complexkurven von* E^4 *sind Kurven vierter Klasse mit zwei Doppeltangenten.*

Die Complexkegel sind somit im Allgemeinen vom Geschlecht „1“ und von der 8. Klasse, die Complexkurven sind Kurven 8. Ordnung.

Die von einem Punkte P ausgehenden Asymptoten liegen nun in der Nullebene π' von P, sie sind die Verbindungslinien von P mit den Punkten, in denen π' $\mathfrak{K}^2_\infty$ schneidet. Hat P von seiner Polarebene π den Abstand e_P, so sind alle Strahlen des Strahlenbüschels (P,π') e_P-Polaren. Nur die beiden in (P,π') liegenden Asymptoten sind neutrale Strahlen. Lässt man e alle Werte von 0 bis ∞ durchlaufen und bildet in den entstehenden ∞^1 e-Polaren-Complexen die Complexkegel (P^4) im Punkte P, so durchsetzen diese alle je zweimal den Strahlenbüschel (P,π') in den Asymptoten von $(P,'\pi)$. Ist insbesondere T ein Punkt von F^2, τ seine Polarebene, so sind ja alle Strahlen von (T,τ) Tangenten an F^2, also Nullpolaren. Neutral und daher auch den andern e-Polaren-Complexen angehörig sind wieder nur die (reellen oder imaginären) Verbindungslinien von T mit den beiden Schnittpunkten $(\tau\ '\ \mathfrak{K}^2_\infty)$, also die beiden Erzeugenden der Regelscharen von F^2 in τ.

Die Tatsache ist von Interesse, dass die Doppelstrahlen t und t_1 des Complexkegels (P^4) eines Punktes P im e-Polaren-Complexe den Doppeltangenten t' und t'_1 der Complexkurve (π^4) in der Polarebene π von P parallel sind: t und t' bezw. t_1 und t'_1 sind ja polare Asymptoten. —

Ein Punkt S_∞ von $\mathfrak{K}^2_\infty$ hat (vgl. S. 90) zur Nullebene in $\mathfrak{N}^2$ jede durch die Gerade s'_∞, die Tangente an $\mathfrak{K}^2_\infty$ in S_∞, gehende Ebene. Sofern S_∞ als Punkt von F^4_e betrachtet wird, kommen unter diesen Ebenen nur diejenigen in Betracht, welche zugleich Tangentialebenen von Φ^{IV}_e sind, also die Asymptotenebene σ, welche F^2 in S_∞ berührt, und die beiden zu σ im Abstande e parallelen Ebenen σ' und σ'_1. σ ist aber nicht Nullebene von S_∞, denn es hat sich oben (S. 101) ergeben, dass keine endliche durch S_∞ gehende Asymptote S_∞ zum Nullpunkte hat. Also hat der Doppelpunkt S_∞ von F^4_e, wie ja zu erwarten war, 2 Nullebenen, σ' und σ'_1. Daraus folgt zugleich, dass der Strahl s'_∞, der

ja als Doppelstrahl von E^4 zwei Nullpunkte und zwei Nullebenen haben muss, zwei in S_∞ vereinigte Nullpunkte und σ' und σ'_1 zu Nullebenen hat. Ist s die Kante des Asymptotenkegels, längs welcher dieser von σ berührt wird, so folgt dual, dass die Doppelebene σ von Φ_e^{IV} zwei Nullpunkte hat: die Punkte S' und S'_1 in welchen s die Uebergangskurve s^4 trifft; sie sind die Pole von σ' bezw. σ'_1 und zugleich die Nullpunkte der Asymptote s, welche zwei in σ vereinigte Nullebenen hat.

Von den Asymptoten verdienen schliesslich noch die Geraden der beiden Regelscharen der F^2 besondere Beachtung. Jede Gerade g einer der beiden Regelscharen hat zwei Punkte, J und J_1, mit der imaginären Raumkurve $\overset{i}{r}{}_1^4 \equiv (F^2 \mid K_i^2)$ gemein. Diese beiden Punkte sind die Nullpunkte von g, sofern g als Doppelstrahl von E^4 angesehen wird. Die Berührungsebenen ι bezw. ι_1 in J bezw. J_1 an F^2 sind die beiden Nullebenen von g als doppelter e-Polare. Sofern g nur als Nullpolare aufgefasst wird, hat sie jeden ihrer Punkte zum Nullpunkte, jede durch sie gehende Ebene zur Nullebene.

Im Allgemeinen ist über die Asymptoten noch auszusagen, dass eine Asymptote t die F_e^4 reell schneidet, wenn sie von ihrer polaren Asymptote einen ebenen Abstand q hat, der grösser als e ist. Ist $q < e$, so schneidet t die F_e^4 imaginär, weil dann ihre beiden Nullebenen imaginär sind, wie dies insbesondere die Geraden der beiden Regelscharen der F^2 zeigen. Wenn $q = e$ ist, so ist t Tangente der F_e^4.

Der Strahlenbüschel (S_∞,σ) ist, wie wir fanden, nicht Nullstrahlenbüschel des Punktes S_∞. Daraus folgt:

(40). Der e-*Polaren-Complex hat ausser den* ∞^2 *Nullstrahlenbüscheln der Punkte von* F_e^4 *noch* ∞^1 *nicht zu diesen gehörige Strahlenbüschel, die* ∞^1 *Asymptotenstrahlenbüschel des Polarraumes.*

Aus der Tatsache, dass die Nullebenen des Punktes S_∞ als Punktes von F_e^4 die beiden 2e-Ebenen der hyperbolisch-gleichseitigen Ebeneninvolution um s'_∞ sind, deren Doppelebenen σ und ε_∞ sind, folgt, dass σ doppelte Nullebene

von S_∞ für $e = 0$ ist, dass also der Asymptotenstrahlenbüschel (S_∞,σ) Nullstrahlenbüschel in E_0^4 ist; und dass ferner für $e = \infty$ S_∞ die ε_∞ zur doppelten Nullebene hat, was beides auch aus der obigen speciellen Behandlung von E_0^4 und E_∞^4 hervorgeht. (S. 99, 100).

§ 6. Complexkegel und Complexkurven in speciellen Punkten bezw. Ebenen.

In Polarräumen mit endlichem Mittelpunkte M besteht in jedem e-Polaren-Complexe mit endlichem Parameter e der Complexkegel (M^4) von M aus dem doppelt zu rechnenden Asymptotenkegel. Für $e = \infty$ ist M ein singulärer Punkt: jeder durch ihn gehende Strahl gehört E_∞^4 doppelt an.

Dual besteht die Complexkurve (ε_∞^4) in jedem E^4 mit Ausnahme von E_∞^4 aus dem doppelt zu rechnenden Tangentenbüschel von $\mathfrak{K}_\infty^2$. In E_∞^4 ist ε_∞ singuläre Ebene, da jeder ihrer Strahlen Doppelstrahl von E_∞^4 ist.

Der Complexkegel eines Punktes S_∞ von $\mathfrak{K}_\infty^2$, dessen Tangentialebene an F^2 die Asymptotenebene σ ist, zerfällt in den Büschel (S_∞,σ) der in S_∞ die F^2 berührenden Asymptoten, welcher doppelt zählt, und die beiden Nullstrahlenbüschel (S_∞,σ') und (S_∞,σ'_1) von S_∞. (Vgl. S. 102). Dual besteht die Complexkurve (σ^4) einer Asymptotenebene σ aus dem doppelt zu rechnenden Asymptotenbüschel (S_∞,σ) und den beiden Nullstrahlenbüscheln von σ: (S',σ) und (S'_1,σ). (Vgl. S. 103). Die Complexkurve (σ^4) hat die Asymptote s, der Complexkegel $(S_\infty{}^4)$ die zu ihr polare Asymptote s'_∞ zum vierfachen Strahle. Für jede andere Ebene durch s, bezw. jeden andern Punkt von s'_∞ sind s bezw. s'_∞ natürlich bloss Doppelstrahlen.

Wir wollen nun den Mittelpunkt des Polarraumes als ∞ fern voraussetzen. S_∞ sei ein Punkt einer der beiden ∞ fernen Geraden g_∞, l_∞ des Basisparaboloids, etwa der Geraden g_∞. Der Complexkegel $(S_\infty{}^4)$ besteht auch hier aus dem doppelt zählenden Asymptotenbüschel (S_∞,σ), wo σ durch g_∞ geht, und den beiden Nullstrahlenbüscheln (S_∞,σ') und (S_∞,σ'_1) von S_∞ (als Punkt von F_0^4). In diesem Falle ist

also g_∞ vierfacher Strahl von (S_∞^4). Da aber S_∞ ein beliebiger Punkt von g_∞ ist, und da sich dual ergibt, dass g_∞ vierfache Tangente der Complexkurve (σ^4) jeder durch g_∞ gehenden Ebene σ ist, so folgt, dass g_∞ und ebenso l_∞ vierfacher Strahl von E^4 ist:

(*41*). *Die beiden unendlich fernen Erzeugenden der Basisfläche eines paraboloidischen Polarraumes sind vierfache Strahlen von dessen* e-*Polaren-Complex* E^4.

Der an E^4 gehende Complexkegel (M_∞^4) besteht in diesem Falle für jeden endlichen Wert von e aus dem vierfach zu zählenden Strahlenbüschel $(M_\infty, \varepsilon_\infty)$.

Indem wir jetzt wieder einen allgemeinen Polarraum voraussetzen, betrachten wir nunmehr eine beliebige Tangentialebene π von Φ_e^{IV}. Ist P' ihr Nullpunkt, so gehören alle Strahlen von (P', π) dem e-Polaren-Complex an. Jeder dieser Strahlen ist als der Complexkurve (π^4) angehörig im Allgemeinen einfach zu zählen, da Punkt P' im Allgemeinen einfacher Punkt der Schnittkurve $(\pi \mid F_e^4) = f^4$ ist. (Vgl. S. 99). Also wird die Complexkurve (π^4) in diesen Strahlenbüschel (P', π) und eine Kurve 3. Klasse zerfallen. Die von P' aus an diese Restkurve 3. Klasse gehenden 3 Tangenten sind Doppelstrahlen von (π^4). Zu ihnen gehören die beiden in π liegenden Asymptoten, die ja durch P' gehen.

Der Complexkegel (P^4) eines beliebigen Punktes P von F_e^4 zerfällt, wie dual folgt, in den Nullstrahlenbüschel (P, π') von P und einen Kegel 3. Ordnung. Die 3 Kanten, in denen dieser den Strahlenbüschel (P, π') schneidet, sind die 3 Tangenten, welche von P aus an die in der Nullebene π' von P liegende Restcomplexkurve 3. Klasse gehen. (S. oben).

Es sei E ein beliebiger e-Punkt auf einer der drei Axen, etwa der a-Axe; seine Nullebene ε', also eine Tangentialebene von Φ_e^{IV}, berührt F_e^4 in E. Also hat die Schnittkurve von ε' mit F_e^4 in E einen Doppelpunkt, sodass jeder Strahl des Strahlenbüschels (E, ε') als Doppelstrahl der Complexkurve (ε'^4) sowie des Complexkegels (E^4) zählt und dass also (ε'^4) in den doppelt zählenden Strahlenbüschel (E, ε') und einen Kegelschnitt zerfällt, wie übrigens auch aus Symmetrie-

gründen folgt: eine Kurve 3. Klasse kann nicht 2 auf einander senkrechte Symmetrieaxen haben. Der Complexkegel (E^4) zerfällt in den doppelt zu zählenden Strahlenbüschel (E,ε') und einen Kegel 2. Ordnung, der die Ebenen β und γ zu Hauptebenen hat.

Schliesslich sei noch erwähnt, dass die Complexkurven der drei (bezw. in paraboloidischen Polarräumen: zwei) Hauptebenen die K_e^{IV}-Kurven der in ihnen liegenden Polarfelder sind, und dass die Complexkegel, welche aus den unendlich fernen Punkten A_∞, B_∞, C_∞ der drei Hauptaxen an E^4 gehen, in die Hauptebene α bezw. β, γ deren C_e^4-Kurven einschneiden.

§ 7. Die Büscheleigenschaft der e-Polaren-Complexe eines Polarraumes.

Da durch einen beliebigen Strahl des Raumes ein bestimmter e-Polaren-Complex eindeutig festgelegt ist, so bilden auch die e-Polarencomplexe des Polarraumes, wie dessen F_e^4-Flächen, einen Büschel. Sie haben also alle eine Congruenz (16,16) gemein.

Zu dieser gehört die Asymptotencongruenz. (Satz (29)). Da sie für jeden e-Polarencomplex Doppelstrahlencongruenz ist, (Satz (39) S. 101), so ist sie als Bestandteil der Grundcongruenz (16,16) vierfach zu rechnen und zählt also als eine Congruenz (8,8).

Die restierende Congruenz (8,8) der Schnittkongruenz (16,16) finden wir mit Hilfe der Teilgrundkurve $\overset{i}{r}{}_I^4$ des F_e^4-Flächenbüschels und des Teilgrundtorsus $\overset{i}{\rho}{}_I^{IV}$ der Φ_e^{IV}-Flächenschar. Die Nullstrahlen der Punkte von $\overset{i}{r}{}_I^4$ oder, was dasselbe ist, der Ebenen von $\overset{i}{\rho}{}_I^{IV}$, sind, wie aus Satz (IX) S. 21 folgt, allen e-Polarencomplexen gemein. Sie bilden eine Congruenz (4,4). Denn z. B. in eine beliebige Ebene π fallen von ihr nur die Nullstrahlen der 4 Schnittpunkte von π mit $\overset{i}{r}{}_I^4$. Nun lässt sich die Tatsache, dass sich sämtliche F_e^4-Flächen längs

$\overset{i}{r}{}^4_I$ berühren, so ausdrücken, dass sämtliche F^4_e-Flächen ausser $\overset{i}{r}{}^4_I$ noch deren unendlich nahe Nachbarkurve gemein haben. Die Nullstrahlenbüschel längs dieser beiden unendlich nahen Nachbarkurven bilden 2 unendlich nahe Congruenzen (4,4); sie sind sämtlichen e-Polaren-Complexen gemein, was besagt, dass die e-Polaren-Complexe die Congruenz (4,4) der Nullstrahlen der Punkte von $\overset{i}{r}{}^4_I$ zur Berührungscongruenz haben. Als solche zählt diese Congruenz (4,4) doppelt und ergänzt also die als Congruenz (8,8) zählende Congruenz der Asymptoten zur vollen Schnittcongruenz (16,16). Ergebnis:

(*42*). *Die* e-*Polaren-Complexe eines Polarraumes für sämtliche Werte von* e *bilden einen Büschel von Complexen vierten Grades. Die Grundcongruenz* (*16,16*) *dieses Büschels besteht aus der vierfach gerechneten Asymptotencongruenz* (*2,2*) *des Polarraumes, welche Doppelstrahlencongruenz für jeden* e-*Polaren-Complex ist, und aus der doppelt zu rechnenden Congruenz* (*4,4*) *der Nullstrahlen der Punkte von* $\overset{I}{r}{}^4_I$ *oder der Ebenen von* $\overset{i}{p}{}^{IV}_I$. *Alle Complexe des Büschels berühren einander längs dieser Congruenz* (*4,4*).

§ 8. Einige specielle e-Polaren-Complexe.

Wenn sich in dem F^4_e-Flächen-Büschel eines Polarraumes' abgesehen von F^4_0 und F^4_∞, noch Flächen finden, die ausser den Punkten von $\mathfrak{K}^2_\infty$ noch andere Doppelpunkte haben, so haben die Nullstrahlencomplexe dieser Flächen, d. h. die zugehörigen e-Polaren-Complexe gleichen Parameters e die Nullstrahlen dieser Doppelpunkte zu Doppelstrahlen.

Ein Beispiel eines solchen e-Polaren-Complexes erhält man in einem Polarraume mit reeller-imaginärer Basisfläche ($-c^2 > -b^2 > -a^2$) für $e = 2c$. Aus Satz (36) S. 99 ist zu schliessen, dass in einem solchen Polarraume E^4 bei von 0 an wachsenden Werten von e für $e = 2c$ zum ersten Male reelle Strahlen haben wird, und zwar sind dies die

Nullstrahlen der beiden Doppelpunkte C und C′ der F^4_{2c}-Fläche. Diese Strahlen sind Doppelstrahlen und zugleich die einzigen reellen Strahlen des sonst völlig imaginären E^4_{2c}.

Ist die reell-imaginäre Basisfläche rotatorisch um die a-Axe, so hat für $e = 2c$ der sonst völlig imaginäre e-Polaren-Complex eine reelle Congruenz von Doppelstrahlen: die Congruenz (2,2) der Nullstrahlen der Punkte des reellen Kreises in der Hauptebene α, in dem sich die beiden imaginären Rotationsellipsoide, aus denen die F^4_{2c} in diesem Falle besteht, durchschneiden. Dieser e-Polaren-Complex E^4_{2c} zerfällt also, da er ausserdem noch die (imaginäre) Congruenz (2,2) der Asymptoten zur Doppelstrahlencongruenz hat, in zwei quadratische Complexe. Damit ist zugleich ein Beispiel geboten für den Fall, dass der Complex der Nullstrahlen der Punkte einer zerfallenden F^4_e ebenfalls zerfällt, während andererseits der ∞-Polaren-Complex eines beliebigen Polarraumes zeigt, dass der Nullstrahlencomplex einer F^4_e-Fläche nicht zu zerfallen braucht, auch wenn diese es tut.

Von besonderem Interesse sind die e-Polaren-Complexe völlig rotatorischer Polarräume. Während nähmlich in allgemeinen Polarräumen mit reeller oder reell-imaginärer Basisfläche ein beliebiger e-Polaren-Complex nicht der Tangentencomplex der F^4_e desselben Parameters e ist — dies ist im allgemeinen nur der Fall für $e = 0$ — ist in Polarräumen, deren Basisfläche eine reelle oder reell-imaginäre Kugel ist, jeder e-Polaren-Complex der Tangentencomplex der zugehörigen F^4_e-Fläche. Er zerfällt in diesen Fällen in zwei quadratische Complexe, die Tangentencomplexe der beiden e-Kugeln des Polarraumes. Die beiden Tangentencomplexe sind zu einander polar im Polarraume.

Anhang.

Der e-Polaren-Complex eines Nullraumes.

§ 1. Im Nullraume fällt jeder Punkt in seine Nullebene hinein und hat also von ihr den Abstand 0. Daher ist die Frage nach dem geometrischen Ort der Punkte, die von ihren Nullebenen den gegebenen Abstand e haben, illusorisch. Von der aus Satz (VI), S. 16 folgenden Tatsache, dass jeder unendlich ferne Punkt von seiner Nullebene jeden beliebigen Abstand hat, wollen wir absehen.

Dagegen ist bei den ∞^4 Polarenpaaren des Nullraumes die Frage nach den Polarenpaaren des gegebenen Abstandes e ebenso berechtigt wie im Polarraume und führt wegen der Einfachheit der Bedingung (Satz (X), S. 23) ebenfalls zu einem Complex. Wir wollen ihn mit H bezeichnen. Er ist involutorisch auf sich selber abgebildet und in sich völlig dual, d. h. projective Eigenschaften der Complexkurven können ohne weiteres auf die Complexkegel übertragen werden, und umgekehrt.

Bevor wir uns dem e-Polaren-Complexe des Nullraumes zuwenden, seien einige Bemerkungen vorausgeschickt: der Nullraum wird als allgemein vorausgesetzt, d. h. das mit ihm verbundene (rechts oder links gewundene) Gewinde ist kein Strahlengebüsch. Die Hauptaxe des Nullraumes heisse a, der Nullpunkt von ε_∞: $\mathfrak{U}$ [1]), die von $\mathfrak{U}$ aus an $\mathfrak{K}_a^2$ gehenden beiden Tangenten werden mit i_1 und i_2 bezeichnet.

§ 2. Der Grad des e-Polaren-Complexes im Nullraume.

Jede der beiden Methoden, die wir zur Bestimmung der Gradzahl des e-Polaren-Complexes im Polarraume anwandten, ist auch im Nullraume verwertbar. Wir führen beide noch einmal kurz durch. Zu Grunde liegen auch hier die Abstandsdefinitionen IIIa und IIIc. e sei eine gegebene endliche Grösse.

---

[1]) Ich behalte die in: Sturm, Liniengeometrie I angewandten Bezeichnungen bei.

1). Um die Anzahl der Strahlen festzustellen, die der Complex H in einen beliebigen Strahlenbüschel (P,ε) wirft, legen wir in (P,ε) eine Correspondenz fest. Die Polaren der Strahlen von (P,ε) bilden den Strahlenbüschel (E,π), dessen Trägerebene die Nullebene von P, dessen Scheitel der Nullpunkt von ε ist. (P,ε) und (E,π) sind projectiv und haben den Nullstrahl $PE = (\pi \mid \varepsilon)$ entsprechend gemein. Einem beliebigen Strahle g von (P,ε), dessen polarer Strahl g′ ist, ordnen wir die beiden Strahlen g_1, g_2 zu, die zu den Schnittstrahlen g'_1, g'_2 des Complexes $[g]^2_e$ (S. 21) mit (E,π) polar sind. Die g im andern Sinne entsprechenden Strahlen $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ sind die in (P,ε) fallenden Strahlen des Complexes $[g']^2_e$. Die vier Coincidenzen der dadurch definierten Correspondenz [2,2] in (P,ε) sind die vier in (P,ε) fallenden Strahlen von H.

Unter Anwendung des Criteriums (A) (S. 29) lässt sich zeigen, dass der Nullstrahl $PE = l$ doppelte Coincidenz der in (P,ε) festgelegten Correspondenz [2,2] ist. Denn dem Strahl l, als Strahl von (P,ε), entspricht in (E,π) der zu ihm polare Strahl $l' \equiv l$. Der Tangentencomplex $[l]^2_e$ wirft in (E,π) nur den Strahl l, der ja Doppelstrahl von $[l]^2_e$ ist. (Vgl. S. 21). Demnach vereinigt sich l mit l_1 und l_2, und ersichtlich auch mit $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$, den beiden ihm im andern Sinne entsprechenden Strahlen, und ist also doppelte Coincidenz der in (P,ε) festgelegten Verwandtschaft [2,2]. Und da sich dies für jeden Strahlenbüschel, dem der Nullstrahl l angehört, beweisen lässt, so folgt, dass l Doppelstrahl von H ist. Das Gleiche gilt für jeden andern Nullstrahl des Nullraumes, d. h. H zerfällt in das Gewinde des Nullraumes, welches als Teil von H doppelt zählt, und einen quadratischen Complex, den wir nunmehr mit H^2 bezeichnen. Ergebnis:

(*43*). *Der Complex der* e-*Polaren eines Nullraumes ist ein Complex vierten Grades und besteht aus dem doppelt zu rechnenden Gewinde des Nullraumes und einem quadratischen Complexe.*

2). Legt man, wie im Polarraume, durch P und E die Parallelen bezw. zu den Strahlen (E,π) und (P,ε), so erhält man in diesem Falle die Nullstrahlenbüschel (P,π) und (E,ε).

Sie sind bezw. zu (P,ε) und (E,π) perspectiv. Die Kegel K_P^2 und K_E^2 (vgl. S. 93) zerfallen je in den Ebenenbüschel um $PE = l$ und einen andern Ebenenbüschel mit durch P bezw. E gehender Axe[1]). Die Ebenen, welche diese letzteren Ebenenbüschel bezw. mit den Rotationskegeln gemein haben, die um PE als Axe und P bezw. E als Spitze mit dem Oeffnungswinkel $2\psi = 2 \arcsin \frac{e}{PE}$ construiert werden können, schneiden in die Strahlenbüschel (P,ε) bezw. (E,π) die e-Polaren ein, die H^2 in sie wirft, womit der Grad „2" des eigentlichen e-Polaren-Complexes H^2 von neuem bewiesen ist.

(Auch bei dieser Methode ergibt sich l als Doppelstrahl des Complexes vierten Grades H. Denn der Ebenenbüschel um l hat mit jedem der beiden construierten Rotationskegel die beiden isotropen Ebenen durch l gemein).

Aus der obigen Erörterung geht zugleich hervor, dass der um P in der Ebene π mit dem Radius e geschlagene Kreis jedenfalls vollständig innerhalb der Complexkurve (π^2) von π (als Punktkurve) liegt. In der Tat wird sich dieser Kreis als Nebenkreis der als Ellipse zu erweisenden Complexkurve (π^2) herausstellen.

§ 3. Construction der Complexkurven und Complexkegel.

Ist π eine beliebige Ebene, P ihr Nullpunkt, so gehen die Polaren der Strahlen von π durch P. d_P sei der durch P gehende Durchmesser des Nullraumes, δ eine beliebige Ebene durch ihn. Die Polaren der Strahlen des Strahlenbüschels (P,δ) bilden in π einen Parallelstrahlenbüschel, dessen Scheitel der unendlich ferne Punkt D_∞ des Schnittstrahles $(\pi \mid \delta)$ ist. Eine zu δ parallele Durchmesserebene $\bar{\delta}$ schneidet also π in einem Strahle g, dessen polarer Strahl g′ dem Strahlenbüschel (P,δ) angehört. δ und $\bar{\delta}$ bilden das Parallelebenenpaar von g′ und g, da das gemeinsame Lot von g und g′ die Hauptaxe a des Nullraumes senkrecht schneidet. Haben

[1]) Diese ist der durch P bezw. E gehende Durchmesser.

also δ und $\bar{\delta}$ den Abstand e von einander, so ist die von $\bar{\delta}$ in π eingeschnittene Gerade g eine e-Polare; und da es zwei zu δ im Abstande e parallele Ebenen, δ_1 und δ_2, gibt, so folgt von neuem, dass H^2 quadratisch ist. δ_1 und δ_2 sind ersichtlich zwei parallele Tangentialebenen des mit dem Radius e um d_P als Rotationsaxe construierten Rotationscylinders R_e^2. Also folgt:

(*44*). *Die Tangenten der Complexkurve* (π^2) *einer Ebene* π, *deren Nullpunkt der Punkt* P *ist, werden in* π *eingeschnitten durch die Tangentialebenen des Rotationscylinders, der mit dem Radius* e *um den durch* P *gehenden Durchmesser als Rotationsaxe construiert werden kann.*

Dual folgt, dass die Nullpunkte der Tangentialebenen von R_e^2, welche in ε_∞ einen Kegelschnitt bilden, mit P verbunden den Complexkegel (P^2) liefern.

Die Tangentialebenen von R_e^2 schneiden in π im Allgemeinen den Tangentenbüschel einer Ellipse ein, welche ihrerseits die Schnittkurve von π mit R_e^2 ist. Sie hat zur Nebenaxe, deren Länge $= 2e$ ist, das von P auf a gefällte Lot n. Daher ist der mit dem Radius e um P geschlagene Kreis der Ebene π der Nebenkreis der Ellipse (π^2). Die Hauptaxe von (π^2) ist der in P auf n senkrechte Nullstrahl h; ihre Länge ist $= \frac{2e}{\sin\lambda}$, wenn λ den Winkel bedeutet, unter dem π gegen d_P geneigt ist. — Für den Complexkegel (P^2) ist n die eine Hauptaxe, die Ebene $[h \mid d_P]$ die eine Hauptebene. Die Schnittstrahlen von (P^2) mit der Ebene $[h \mid d_P]$ trennen d_P und h harmonisch. (Vgl. S. 118).

Die beiden isotropen Ebenen durch d_P, $\rho_1 = [d_P \mid i_1]$ und $\rho_2 = [d_P \mid i_2]$, welche die beiden durch d_P an R_e^2 gehenden Tangentialebenen sind, schneiden in π die beiden von P aus an die Ellipse (π^2) gehenden Tangenten j_1 und j_2 ein. j_1 und j_2 sind Nullstrahlen. Sie gehören, da sie zu sich selbst polar sind, auch dem Complexkegel (P^2) an und sind die Schnittstrahlen von (P^2) mit dem Nullstrahlenbüschel (P,π). j_1 gehört, als i_1 schneidender Nullstrahl, dem singulären Strahlennetze der i_1 schneidenden Nullstrahlen an, d. h.

(45). *Der quadratische Complex* H^2 *hat mit dem Gewinde des Nullraumes eine Congruenz* (2,2) *gemein, welche aus denjenigen Nullstrahlen besteht, die eine der beiden Geraden* i_1 *oder* i_2 *schneiden.*

Die Punkte $(i_1 \mid j_1)$ bezw. $(i_2 \mid j_2)$ sind die Berührungspunkte der Tangenten j_1 bezw. j_2 der Complexkurve (π^2). Dual folgt unmittelbar, dass die Nullebenen $[i_1 \mid j_1]$ bezw. $[i_2 \mid j_2]$ der Punkte $(i_1 \mid j_1)$ bezw. $(i_2 \mid j_2)$ die Berührungsebenen des Complexkegels (P^2) längs dessen Kanten j_1 bezw. j_2 sind.

Die Tangentialebenen von R_e^2 schneiden in jede zu π parallele Ebene deren Complexkurve ein. Sie ist congruent und parallel mit (π^2). Ueberhaupt sind die Complexkurven sämtlicher Ebenen, welche, wie π, gegen a um den Winkel λ geneigt sind, mit (π^2) congruent. Dual sind die Complexkegel sämtlicher Punkte congruent, welche auf einem Rotationscylinder um a als Rotationsaxe liegen, d. h. es gibt in H^2 gestaltlich nur ∞^1 verschiedene Complexkegel und Complexkurven.

In den auf a senkrechten Ebenen α sind die Complexkurven Kreise des Radius e und des Mittelpunktes $(a\ \alpha)$, denn für diese Ebenen ist $\lambda = 90^0$, also die Hauptaxe von $(\alpha^2) : = \frac{2e}{\sin\lambda} = 2e =$ der Nebenaxe. Dual sind die Complexkegel der Punkte von a Rotationskegel der Axe a, für deren halben Oeffnungswinkel φ die Gleichung gilt: $\operatorname{tg}\varphi = \frac{k}{e}$, wo k den Parameter des Nullraumes bedeutet.

§ 4. Die Doppelstrahlen und die singuläre Fläche von H^2.

Es sei δ eine beliebige Durchmesserebene. Um ihre Complexkurve zu finden legen wir dureh a die zn δ senkrechte Ebene, welche in δ den Durchmesser d einschneidet. Da die Complexkegel der Punkte von d congruent und parallel sind und sämtlich δ zur Symmetrieebene haben, (vgl. S. 112) so bilden ihre Schnittlinien mit δ zwei Parallelstrahlenbüschel,

deren Scheitel die Punkte D'_∞ und D''_∞ seien. Die Strahlenbüschel (D'_∞, δ) und (D''_∞, δ) bilden die Complexkurve (δ^2).

Den Strahlenbüscheln (D'_∞, δ) und (D''_∞, δ) ist die unendlich ferne Gerade n_∞ von δ gemeinsam. Sie ist ein Nullstrahl von ε_∞, stellt also die Vereinigung zweier polarer Geraden dar. Ihre Zugehörigkeit zu H^2 ist gesichert durch Satz (VIIIc) S. 19. Also gilt:

(*46*). *Die Nullstrahlen der unendlich fernen Ebene gehören dem* e*-Polaren-Complexe* H^2 *an.*

Der Nullstrahl n_∞ ist Doppelstrahl für (δ^2) und offenbar auch für die Complexkurve jeder andern durch ihn gehenden Ebene. Dual folgt, dass der Strahl n_∞, der ja zu sich selbst polar ist, auch für die Complexkegel aller seiner Punkte Doppelstrahl ist, und dass diese Complexkegel also je in zwei Strahlenbüschel zerfallen. Ist D_∞ der Nullpunkt von δ, so sind die Trägerebenen der beiden Strahlenbüschel, in die (D^2) zerfällt, die beiden zu δ im Abstande e parallelen Ebenen δ' und δ''. Sie sind die Nullebenen von D'_∞ bezw. D''_∞. Als Ergebnis können wir folgende Sätze aussprechen:

(*47a*). *Die Complexkurve einer Durchmesserebene* δ *zerfällt in zwei Strahlenbüschel, deren Scheitel die Nullpunkte der beiden zu* δ *im Abstande* e *parallelen Ebenen sind.*

(*47b*). *Der Complexkegel eines Punktes* D_∞ *von* ε_∞ *besteht aus zwei Strahlenbüscheln, deren Trägerebenen die zur Nullebene von* D_∞ *im Abstande* e *parallelen Ebenen sind.*

(*48*). *Die Nullstrahlen von* ε_∞ *sind Doppelstrahlen von* H^2.

Somit bildet der Strahlenbüschel $(\mathfrak{U}, \varepsilon_\infty)$, doppelt gerechnet, die Complexkurve von ε_∞ und den Complexkegel $(\mathfrak{U}^2)$.

Da die Punkte von ε_∞ offenbar die einzigen Punkte des Raumes sind, deren Complexkegel zerfällt, so ist die unendlich ferne Ebene des Raumes der Ort der singulären Punkte von H^2. Sie ist also, als singuläre Fläche von H^2, vierfach zu zählen. Dual gilt Entsprechendes, d. h.:

(*49*). *Die singuläre Fläche von* H^2 *besteht als Punktfläche aus der vierfach zu rechnenden unendlich fernen Ebene, als Klassenfläche aus dem vierfach zu zählenden Durchmesserebenenbündel.*

Daraus geht weiter hervor, dass die Strahlen von $(\mathfrak{U},\varepsilon_\infty)$ die einzigen Doppelstrahlen von H^2 sind, d. h. H^2 gehört zu den quadratischen Complexen mit einem Strahlenbüschel von Doppelstrahlen. Es gibt nur zwei Arten von quadratischen Complexen dieser Eigenschaft, deren singuläre Fläche von der in Satz (49) angegebenen Beschaffenheit ist. Ihnen kommen die Signaturen [(221)1] bezw. [321] zu[1]). Ihr Doppelstrahlenbüschel ist entstanden durch Zusammenfallen zweier Doppelstrahlenbüschel, die ihrerseits eine ausgeartete Regelschar von Doppelstrahlen darstellen. In der Tat kann jeder Nullstrahlenbüschel des Nullraumes, also auch $(\mathfrak{U},\varepsilon_\infty)$, aufgefasst werden als entstanden durch Vereinigung zweier polarer Strahlenbüschel (P,ε) und (E,π) des Nullraumes, die ihrerseits wieder die ausgeartete Form einer involutorischen Regelschar des Nullraumes darstellen.

Um zu entscheiden, welche der beiden genannten Signaturen dem e-Polaren-Complexe H^2 zuzuerkennen ist, untersuchen wir die Congruenzen, die durch jeden der Doppelstrahlen des e-Polaren-Complexes aus diesem ausgeschieden werden.

Jeder Strahl n_∞ von $(\mathfrak{U},\varepsilon_\infty)$ scheidet aus H^2 eine Congruenz (2,2), $(2,2)_{n_\infty}$, aus, welche ∞^1 Paare von Strahlenbüscheln enthält. Diese Congruenz muss sich als aus zwei singulären Strahlennetzen mit der Leitgerade n_∞ bestehend erweisen lassen[2]). Zwischen der Punktreihe von n_∞ und dem Ebenenbüschel um n_∞ lässt sich eine Verwandtschaft [2,2] herstellen. Denn man kann jedem Punkte D_∞ von n_∞ die beiden Ebenen δ' und δ'' entsprechen lassen, die zur Nullebene δ von D_∞ im Abstande e parallel laufen und die Trägerebenen der Strahlenbüschel sind, in die (D^2_∞) zerfällt; dual sind dann einer beliebigen Ebene δ durch n_∞ die Scheitel der beiden Parallelstrahlenbüschel, aus denen (δ^2) besteht, zugeordnet. Diese Correspondenz [2,2], die wir mit $V(n_\infty)$ bezeichnen wollen, lässt sich in zwei Projectivitäten

[1]) Vgl. R. Sturm, Liniengeometrie III, Art. 842—844.

[2]) Liniengeometrie III, S. 467, 468.

zwischen der Punktreihe von n_∞ und dem Ebenenbüschel um n_∞ zerlegen, sodass jedem Elemente die ihm in den beiden Projectivitäten entsprechenden Elemente in $V(n_\infty)$ zugeordnet sind. Um dies zu zeigen, nehmen wir eine beliebige, endliche, n_∞ nicht schneidende Gerade l an. Die beiden Richtungen in l wollen wir der Einfachheit halber als „rechts“ und „links“ unterscheiden. Die Nullebene δ eines beliebigen Punktes D_∞ von n_∞ schneide l in $\mathfrak{D}$. Die Schnittpunkte der D_∞ in $V(n_\infty)$ entsprechenden beiden Ebenen δ' und δ'' mit l liegen rechts und links (in gleichem Abstande) von $\mathfrak{D}$. Wir können nun dem Punkte D_∞ die Ebene $\delta^{(i)}$ zuordnen, welche l rechts von $\mathfrak{D}$ schneidet. Damit ist ein eineindeutiges Entsprechen der Punkte und Ebenen von n_∞ herbeigeführt. Für die Zuordnung: Punkt-Ebene ist dies evident. Sei nun ξ eine beliebige Ebene durch n_∞, $\mathfrak{X}$ ihr Schnittpunkt mit l. Dann entspricht ξ vermöge der obigen Zuordnung derjenige Punkt $X_\infty^{(i)}$ von n_∞, dessen zu ξ im Abstande e parallele Null-Ebene l links von $\mathfrak{X}$ schneidet. Somit ist auch die Zuordnung Ebene-Punkt als eindeutig und damit die obige Zuordnung zwischen den Punkten von n_∞ und den Ebenen durch n_∞ als Projectivität erwiesen.

Also ist in der Tat die Verwandtschaft $V(n_\infty)$ in zwei Projectivitäten aufgelöst. Jede dieser Projectivitäten zwischen der Punktreihe von n_∞ und dem Ebenenbüschel um n_∞ erzeugt ein singuläres Strahlennetz mit n_∞ als Leitgerade [1]). Beide Strahlennetze zusammen bilden die Congruenz $(2,2)_{n_\infty}$. Also:

(*50*). *Jeder Strahl* n_∞ *von* $(\mathfrak{U},\varepsilon_\infty)$ *scheidet aus* H^2 *eine Congruenz* (*2,2*) *aus, welche aus zwei singulären Strahlennetzen mit* n_∞ *als Leitgerade besteht.*

(Beiläufig mag hier erwähnt werden, dass man sich in n_∞ mittels der Punkt-Ebenenverwandtschaft $V(n_\infty)$ eine involutorische Punktverwandtschaft [2] herstellen kann, indem man sich der durch den Nullraum bewirkten projectiven Beziehung der Ebenen des Ebenenbüschels um n_∞ auf ihre

[1]) Vgl. Liniengeometrie, I S. 83 art. 58.

Nullpunkte bedient. Einem beliebigen Punkte von n_∞ entsprechen dann die Scheitel der Strahlenbüschel, in die die Complexkurve seiner Nullebene zerfällt. Diese Verwandtschaft [2] ist in zwei Involutionen zerlegbar und gibt also, auf einen Kegelschnitt übertragen, eine in zwei Strahlenbüschel zerfallende Directionskurve[1]).

Wir wollen nun insbesondere die durch die Strahlen i_1 und i_2 von (U,ε_∞) aus H^2 ausgeschiedenen Congruenzen betrachten. Die einem beliebigen Punkte J_∞ von i_1 in $V(i_1)$ zugeordneten Ebenen ι' und ι'', die zur Nullebene ι von J_∞ im Abstande e parallel laufen, fallen gemäss Satz (VIIb) S. 17 mit ι zusammen, und der Complexkegel (J^2_∞) besteht aus dem doppelt zu rechnenden Nullstrahlenbüschel (J_∞,ι). Somit vereinigen sich die beiden singulären Strahlennetze, die i_1 aus H^2 ausscheidet, mit einander und bilden das singuläre Strahlennetz S_1 der i_1 schneidenden Nullstrahlen, ein zu Satz (45) stimmendes Resultat. Demnach sind i_1 und i_2 stationäre Doppelstrahlen von H^2, und es gilt:

(*51*). *Der* e-*Polaren-Complex* H^2 *hat zwei stationäre Doppelstrahlen,* i_1 *und* i_2, *von denen jeder nur ein einziges singuläres Strahlennetz aus* H^2 *ausscheidet.*

Da i_1 und i_2 getrennte Strahlen sind, so gehört H^2 die Signatur [(221)1] zu[2]).

Zufolge der Definition der singulären Strahlen eines quadratischen Complexes als der Doppelstrahlen seiner zerfallenden Complexkegel oder Complexkurven sind sämtliche Strahlen von S_1 und S_2 — wozu auch die Strahlen von (U,ε_∞) gehören — singuläre Strahlen von H^2. Da die singulären Strahlen eines quadratischen Complexes eine Congruenz (4,4) bilden, so sind S_1 und S_2 je doppelt zu rechnen und es folgt:

(*52*). *Die Congruenz* (*2,2*) *der Strahlen, welche* H^2 *mit dem Gewinde des Nullraumes gemein hat, bildet, doppelt gerechnet, die Congruenz* (*4,4*) *der singulären Strahlen von* H^2.

§ 5. Der Büschel der consingulären Complexe von H^2.

Durch einen beliebigen Strahl l des Raumes ist ein e-Polaren-Complex, der l enthält, eindeutig bestimmt: der-

[1]) Vgl. Liniengeometrie I, art. 30.

[2]) Vgl. a. a. O. S. 468, 469.

jenige, dessen Parameter e gleich dem Abstande des Strahles l von seiner Polare l′ im Nullraume ist. Also bilden die e-Polaren-Complexe H^2, die man erhält, wenn man e alle Werte von 0 bis ∞ annehmen lässt, einen Büschel von quadratischen Complexen.

Die Construktion der Complexkurve (π^2) einer beliebigen Ebene π mittels des Rotationscylinders R_e^2 (vgl. S. 112) zeigt die Büscheleigenschaft unmittelbar: Lässt man nämlich e alle Werte von 0 bis ∞ annehmen, so durchläuft R_e^2 die Büschelschar sämtlicher Rotationscylinder mit der Axe d_P (S. 112). Daher bilden die sämtlichen Complexkurven $(\pi^2)_e$ in π eine Schar von Kurven zweiter Klasse. Grundtangenten derselben sind die Nullstrahlen j_1 und j_2, welche jede Complexkurve $(\pi^2)_e$ in $(i_1|j_1)$ bezw. $(i_2|j_2)$ berühren und also als Grundtangenten je doppelt zu rechnen sind. Die zu den Complexkurven gehörigen Punktkurven sind concentrische, homothetische Ellipsen mit dem Nullpunkte P von π als Mittelpunkt; sie bilden eine Büschelschar von sich doppelt berührenden Kegelschnitten. — Da sich (P^2) und (π^2) durchaus dual gegenüberstehen, so folgt unmittelbar, dass die sämtlichen Complexkegel $(P^2)_e$ einen Büschel von sich längs j_1 und j_2 berührenden Kegeln 2. Ordnung bilden. Die gemeinsamen Berührungsebenen sämtlicher Kegel des Büschels längs j_1 bezw. j_2 sind die Ebenen $[i_1|j_1]$ bezw. $[i_2|j_2]$, die Nullebenen von $(i_1|j_1)$ bezw. $(i_2|j_2)$. Ergebnis:

(*53*). *Die* e-*Polaren-Complexe* H^2 *eines Nullraumes für sämtliche Werte von* e *bilden einen Büschel von quadratischen Complexen. Die Grundcongruenz* (*4,4*) *des Complexbüschels ist die doppelt zu rechnende Congruenz* (*2,2*) *der Nullstrahlen, welche* i_1 *oder* i_2 *schneiden: Sämtliche Complexe des Büschels berühren einander längs dieser Congruenz* (*2,2*).

Die oben abgeleiteten Sätze (48) (49) (51) und (52) sind von dem Werte von e unabhängig. Sie gelten daher für jeden e-Polaren-Complex H^2. Also sind sämtliche e-Polaren-Complexe H^2 consingulär: sie haben dieselbe singuläre Fläche und dieselbe Congruenz der singulären Strahlen. Diese ist zugleich die Grundcongruenz des Büschels, den die

e-Polaren-Complexe bilden. Dies alles stimmt zu der allgemeinen Theorie der quadratischen Complexe mit der Signatur [(221)1] [1]).

Es mögen nun noch kurz die beiden Grenzfälle $e = 0$ und $e = \infty$ besprochen werden.

Soll der Abstand e zweier Polaren des Nullraumes $= 0$ sein, so schneiden diese einander, sind also Nullstrahlen und fallen zusammen. Also wird H_0^2 gebildet durch das doppelt gerechnete Gewinde des Nullraumes, d. h. der Büschel der e-Polaren-Complexe enthält einen Doppelcomplex, bestehend aus einem doppelt zu rechnenden allgemeinen Gewinde.

Der ∞-Polaren-Complex H_∞^2 des Nullraumes ergibt sich unmittelbar aus Definition IV, wenn man bedenkt, dass i_1 und i_2 als Nullstrahlen zu sich selbst polar sind: Er besteht aus den beiden Strahlengebüschen $[i_1]$ und $[i_2]$ und hat die Durchmesser des Nullraumes und die Geraden der ε_∞ zu Doppelstrahlen. Die Complexkurve einer beliebigen Ebene π kann, wie die andern Complexkurven $(\pi^2)_e$, mittels eines Rotationscylinders, in diesem Falle des Rotationscylinders R_∞^2 (vgl. S. 23) construiert werden.

Dass der Büschel der e-Polaren-Complexe H^2 des Nullraumes einen Complex enthält, der in zwei Strahlengebüsche mit den 2 stationären Doppelstrahlen des allgemeinen H^2 als Leitstrahlen zerfällt, steht im Einklang mit der allgemeinen Theorie der quadratischen Complexe von der Signatur [(221)1] [2]).

Der gesamte ∞-Polaren-Complex H_∞^4 des Nullraumes, bestehend aus H_∞^2 und dem doppelt zu rechnenden Gewinde des Nullraumes (vgl. Satz (43) S. 110), kann, wie der ∞-Polaren Complex im Polarraume, aufgefasst werden als Complex (4. Grades) der Treffstrahlen entsprechender Strahlen zweier projectiv auf einander bezogenen (ausgearteten) Regelscharen. Diese sind: der Tangentenbüschel der absoluten Kurve und ein (imaginärer) Cylinder 2. Ordnung mit $\mathfrak{U}$ als Spitze, C_1^2, dessen Kanten den Tangenten von $\mathfrak{K}_a^2$ polar sind.

[1]) Vgl. a. a. O.

[2]) a. a. O. S. 469.

Lebenslauf.

Ich, Rudolf Dittrich, evangelisch, bin geboren am 1. Mai 1886 in Breslau als Sohn des Oberlehrers am hiesigen Realgymnasium am Zwinger Prof. Rudolf Dittrich und seiner Frau Margarete, geb. Burgund. Von Ostern 1892 an besuchte ich das Realgymnasium am Zwinger zu Breslau, das ich Ostern 1904 mit dem Zeugnis der Reife verliess. Hierauf studierte ich an hiesiger Universität Mathematik und Naturwissenschaften, während der ersten Semester auch Germanistik und vergleichende Sprachwissenschaft. Mit Ausnahme des S.-S. 1905, während dessen ich in Tübingen studierte, und des W.-S. 1906/07, in dem ich an der Technischen Hochschule zu Charlottenburg vornehmlich das Studium der angewandten Mathematik betrieb, war ich an der Universität Breslau bis November 1909 immatriculiert.

Ich besuchte die Vorlesungen und Uebungen der Herren Professoren und Dozenten:

Bohn (†), Drescher, Ebbinghaus, Franz, Freudenthal (†), Hoenigswald, Hoffmann, Kneser, Kühnemann, Kükenthal, Landsberg, Liebich, Lummer, Jos. Partsch, Pax, Pringsheim, Rosanes, Schaefer, Siebs, Sombart, Sturm in Breslau, v. Brill, v. Koken, Maurer in Tübingen, Hartmann, Hessenberg, Jolles, Lampe, Eugen Meyer, Müller-Breslau Reichel, Rothe, W. Wedding in Charlottenburg.

Ihnen allen weiss ich für reiche Förderung aufrichtigen Dank.